(+) v. lez. XVIII

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera

a.a. 2009/10

Lezione **XIX**

Lemma di "fuga"

Escape lemma

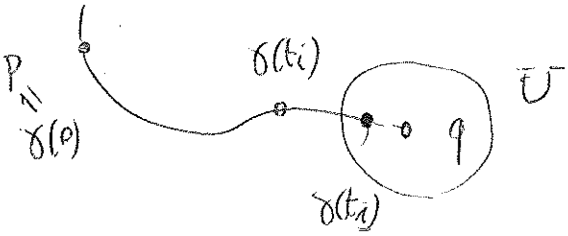
Sia $\bar{V}$ campo vettoriale (liscio) su M var. liscia

Se γ è una curva integrale di $\bar{V}$ il cui dom. massimale non sia tutto $\mathbb{R}$, allora $\operatorname{Im}\gamma$ non è contenuta in qualsivoglia compatto K di M

Dim. per assurdo, $(a,b) \ni t \longmapsto \gamma(t) \in M$ int. massimale.

Se $\operatorname{Im}\gamma \subset K$ compatto, sia $t_i \nearrow b$.

$\{\gamma(t_i)\} \subset K$ ammette una sottosuccessione convergente, denotata allo stesso modo, $\gamma(t_i) \to q \in K$

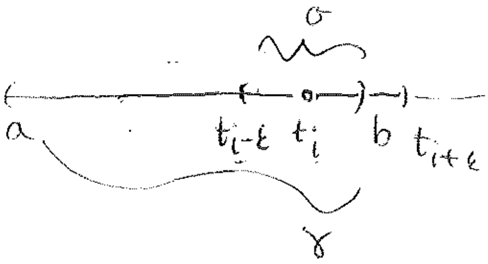


Sia $\bar{U} \ni q$, $\varepsilon > 0$ t.c. Θ sia def su $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \bar{U}$

sia i t.c. $\gamma(t_i) \in \bar{U}$

sia $\sigma : (a, t_i + \varepsilon) \to M$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in (a,b) \\ \vartheta_{t-t_i} \circ \vartheta_{t_i}(p) & t \in (t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon) \end{cases}$$



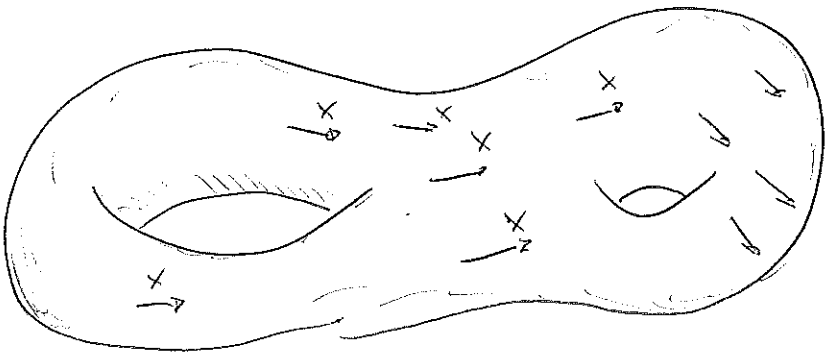
$\sigma = \gamma$ su $(t_i - \varepsilon, b)$

σ estende γ : assurdo $\square$

Corollario

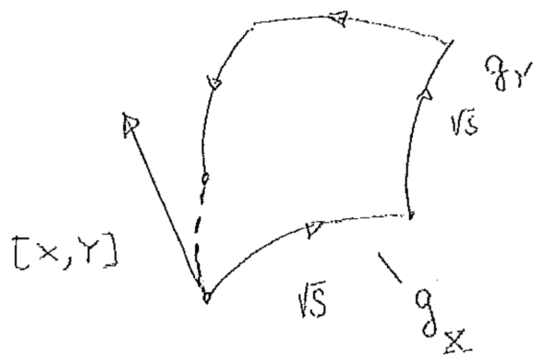
Sia M compatta. Allora ogni campo vettoriale su M è <u>completo</u> (i.e. def. su tutto $\mathbb{R}$).

Dim. ovvia: M è compatta $\Rightarrow$ γ deve essere def. in tutto $\mathbb{R}$, altrimenti $\mathrm{Im}\,\gamma$ non potrebbe essere contenuta in alcun compatto di M.



X è completo

★ Significato di $[X,Y]$



si fa tendere $s \to 0$

Si prova che

$$\boxed{[X,Y]=0 \iff g_X^t\, g_Y^s = g_Y^s\, g_X^t}$$

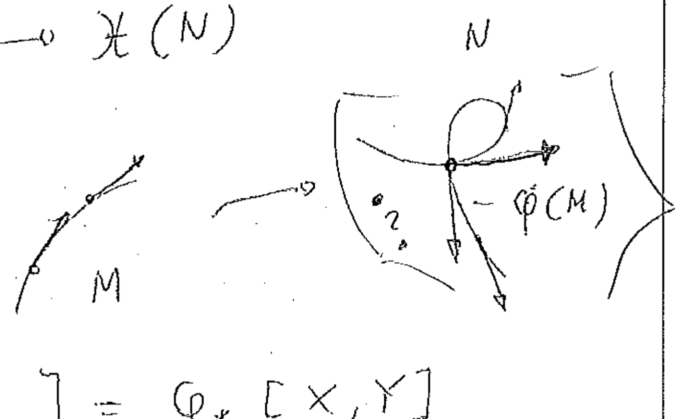
v. esempio successivo

★ Osservazione: in generale

$$\varphi : M \to N \quad \text{appl. differenziabile}$$

$$\not\Rightarrow \quad \varphi_* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$$

in generale:

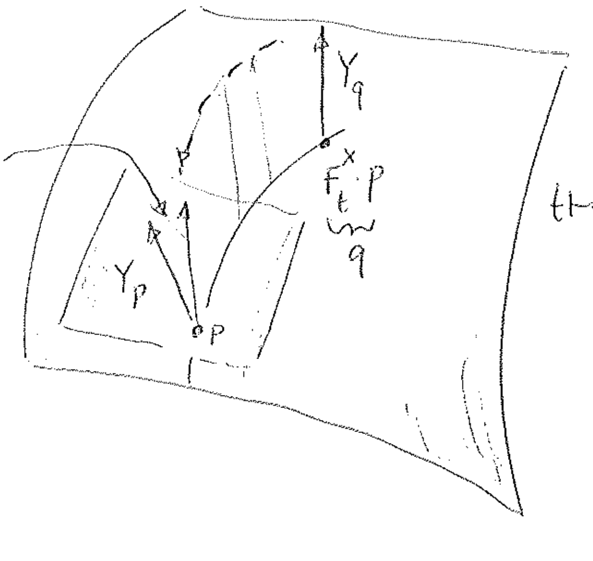


Ciò è vero se φ è un diffeomorfismo e si ha: $[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_* [X,Y]$

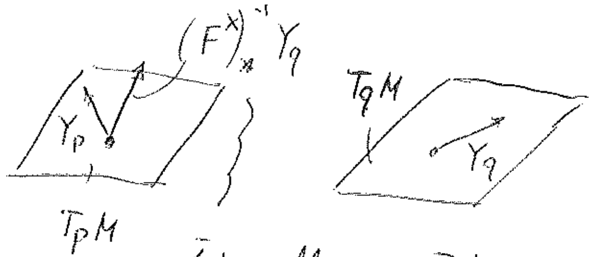
44 Derivata di Lie di un campo vettoriale

(derivata del pescatore)
fisherman's derivative

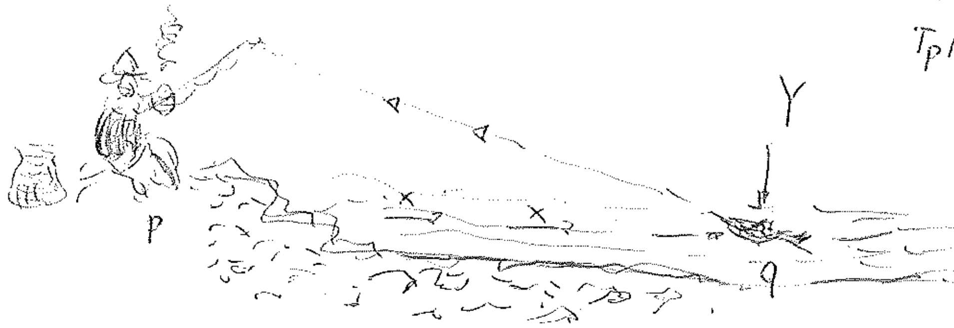
$$\left(F_t^{X^{-1}}\right)_* Y_q = \left(F_t^X\right)_*^{-1}$$



$t \mapsto F_t^X$ flusso di X
flow



è un vettore in T_pM



$$\left(F^{X^{-1}}\right)_* = $$

$$\left(\mathcal{L}_X Y\right)(p) = \left(\frac{d}{dt}\left(F^X\right)_*^{-1} Y\right)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{\left(F_t^X\right)_*^{-1} Y\left(F_t^X p\right) - Y(p)}{t}$$

★ Teorema: $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ $\mathcal{L}_X Y = 0 \Leftrightarrow [X,Y] = 0$

| Y è invariante rispetto al flusso generato da X

Dim. Operiamo in coordinate:

$X \rightsquigarrow \xi = (\xi^i)$ F_t gruppo ad un par. di diffeo

$Y \rightsquigarrow \eta = (\eta^i)$

$x_0 \longrightarrow x$ $x = x_0 + t\xi + \dots$

$$F_t : x^i(t, x_0^1 \dots x_0^n) = x_0^i + t\,\xi^i(x_0^1 \dots x_0^n) + o(t)$$

$$F_t \quad : \quad x = x_0 + t\xi + \dots$$
$$x_0 = x - t\xi + \dots$$

$$(F_t^{-1})_* = I - t\,\frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad \left(\text{in comp: } \delta^i_j - t\,\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)$$

$$\left((F_t^{-1})_* \eta \right)(x_0) = \eta^j(x)\,\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j}$$

⚠ sia F che η dipendono da t

deriviamo rispetto a t e calcoliamo tutto in $t=0$ (i.e. in x_0)

$$\frac{d}{dt}\Big[(F_t^{-1})_* \eta\Big]_{t=0} = \left[\frac{d(F_t^{-1})_*}{dt}\,\eta + (F_t^{-1})_* \frac{d\eta}{dt}\right]_{t=0}$$

$(F_0^{-1})_* = I$

$$= \left(-\eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}\right)_{t=0}$$

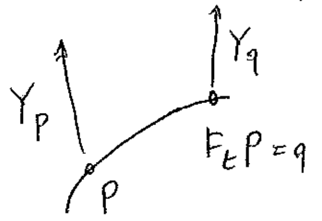
$$= \left(-\eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\right)_{t=0}$$

$$= [\xi, \eta]$$

□

$\rightsquigarrow \quad (F_t^X)\, Y_p = Y_q = Y_{F_t^X p}$

invarianza di Y rispetto al flusso di X [segue da XIX-4]



* Un gruppo di Lie G è un gruppo dotato di una struttura di varietà differenziabile tale che

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, h) \longmapsto g \cdot h^{-1}$$

sia un'applicazione liscia ($G \times G$ dotato della struttura di varietà prodotto)

[ovviamente, ciò equivale a dire che le applicazioni $(g, h) \longmapsto gh$ e $g \longmapsto g^{-1}$ sono lisce]

Esempi $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ (gruppi lineari generali), $O(n)$ gr. ortogonale, $U(n)$ gr. unitario, $SO(n)$ gr. ortog. speciale ($\det = 1$), $SU(n)$ gruppo unitario speciale ($\det = 1$) sono gruppi di Lie (operazione di gruppo: prodotto tra matrici)

Importanti sono le operazioni di traslazione a sinistra e a destra (e sono diffeomorfismi)

$$L_g : \underset{G}{\overset{\cap}{x}} \longmapsto \underset{G}{\overset{\cap}{g \cdot x}}$$ traslazione a sinistra

$$R_g : x \longmapsto x \cdot g$$ traslazione a destra

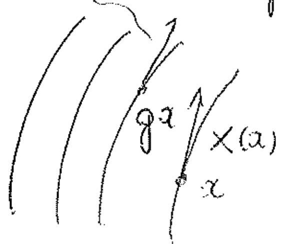
Def. $X \in \mathfrak{X}(G)$ (campo vettoriale) è

detto invariante a sinistra se

$$X(g \cdot x) = (L_g)_* X(x) \qquad \forall x \in G$$

$X(g \cdot x) = (L_g)_* X(x)$

ciò equivale a richiedere



$$X(g) = (L_g)_* \underset{\substack{\uparrow \\ \text{identità di } G}}{\overset{\substack{T_e(G) \\ \cup}}{X(e)}}$$

ovvero $\boxed{(L_g)_* X = X}$

$[(L_g)_* X](gx) = X(gx)$

Da

$$(L_g)_* [X, Y] = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y]$$

segue subito che (L_g è diffeom.)

se X e Y sono invarianti a sinistra, lo è

pure $[X, Y]$:

$$(L_g)_* ([X, Y]) = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y]$$
$$= [X, Y] \qquad \forall x \in G$$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g} \equiv \{$campi vettoriali inv. a sinistra di $G\}$ (left invariant)

è un'algebra di Lie (rispetto a $[\,,\,]$) (come spazio vettoriale $\mathfrak{g} \cong T_e G$

detta algebra di Lie di G. e $\dim \mathfrak{g} = \dim G$)

Nota

La teoria dei gruppi di Lie nasce dall'idea (di Lie) di estendere alle equazioni differenziali la teoria di Galois (!!) " simmetrie dell'equazione danno vita a fattori integranti delle EDO "

. . .

Importante è il collegamento con il programma di Erlangen (F. Klein, 1872)

"lo studio di una geometria consiste in quello delle proprietà invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni"

. . .

In meccanica, a sua volta, l'invarianza rispetto ad un gruppo di trasformazioni dà vita a integrali primi (quantità conservate) di un sistema fisico (tempo → energia, traslazioni → quantità di moto, rotazioni → momento angolare) (Teorema di E. Noether ***)

. . .

meccanica non relativistica
gruppo di Galileo

relatività ristretta
gruppo di Lorentz
→ elettromagnetismo classico

Invarianza per diffeomorfismi delle leggi fisiche:
principio di covarianza generale (Einstein, 1915)
→ Relatività generale