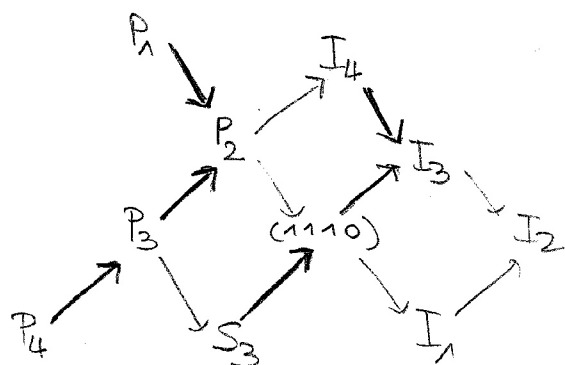


SOLUTIONS

① L'AR- quiver di $1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ è



<u>dim</u>	P_1	P_2	P_3	P_4	I_1	I_2	I_3	I_4
	(1000)	(1111)	(0011)	(0001)	(1100)	(0100)	(0110)	(0111)

(a) τI_2 è dato da $\underline{\dim} \tau I_2 = (1110)$, quindi ha rappresentazione

$$K \xleftarrow{1} K \xrightarrow{1} K \xrightarrow{0} 0$$

(b) $0 \rightarrow \tau I_2 \rightarrow I_3 \oplus I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow 0$

(c) Per la formula di Auslander-Reiten

$$\text{Ext}_R^1(S_3, S_3) \cong \overline{\text{DHom}}(S_3, \tau S_3) = \overline{\text{DHom}}(S_3, P_4) = 0$$

poiché S_3 e P_4 sono due semplici non isomorfi, quindi $\text{Hom}(S_3, P_4) = 0$.

③ (a) NO. Esempio: Λ come nell'esercizio 1
 $C = I_1, A = S_3$.

Poiché C è iniettivo, si ha $\text{Ext}_R^1(A, C) = 0$

Ma $\text{Ext}_R^1(C, A) = \text{Ext}_R^1(I_1, S_3) \cong \text{Dffom}(S_3, U_1) = \text{Dffom}(S_3, S_3) = K$.

(b) NO. Esempio: $\Lambda = KQ$ con $Q: 1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$,
 consideriamo l'indecomponibile iniettivo I_2 .

$$I_2: K \xrightarrow{1} K \xleftarrow{1} K$$

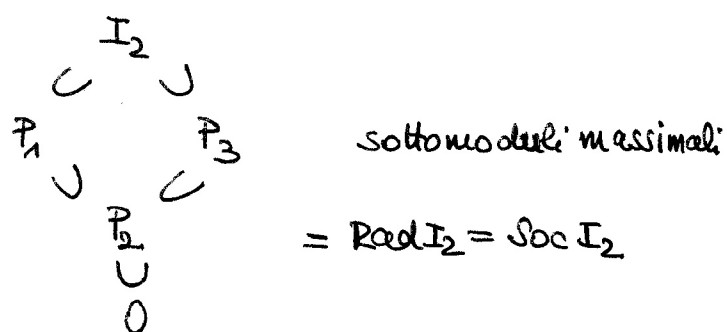
ha due sotto moduli massimali:

$$P_1: K \xrightarrow{1} K \xleftarrow{0} 0$$

$$P_3: 0 \xrightarrow{0} K \xleftarrow{1} K$$

Quindi $\text{Rad } I_2 = P_1 \cap P_3 = 0 \rightarrow K \leftarrow 0 = P_2$
 non è massimale!

La struttura di I_2 è



(c) SÌ. Infatti se P è proiettivo indecomponibile, allora $\text{Rad } P$ è l'unico sottomodulo massimale e quindi ogni sottomodulo proprio $U \subsetneq P$ è contenuto in $\text{Rad } P$ ed è pertanto essenziale; se $U + P' = P$, allora anche $\text{Rad } P + P' = P$ e segue $P' = P$. $\square$