Logica booleana

Algebra di Boole

- Opera con i soli valori di verità 0 o 1 (variabili booleane o logiche)

- La struttura algebrica studiata dall'algebra booleana è finalizzata all'elaborazione di espressioni nell'ambito del calcolo proposizionale.

- Operatori logici AND, OR e NOT: la loro combinazione permette di sviluppare qualsiasi funzione logica e consente di trattare in termini esclusivamente algebrici le operazioni insiemistiche dell'intersezione, dell'unione e della complementazione, oltre a funzioni binarie.

Logica proposizionale

- Linguaggio formale con struttura sintattica basata su proposizioni elementari (atomi) e su connettivi logici di tipo vero-funzionale (AND, OR, NOT...), che restituiscono il valore di verità di una proposizione in base al valore di verità delle proposizioni connesse

- La definizione della struttura delle frasi (o sintassi) della logica proposizionale si fonda su due componenti:

  - un alfabeto di simboli
  - un insieme di sequenze di simboli (un linguaggio) definito tramite una grammatica generativa

- NB: Una grammatica generativa è un insieme di regole che "specificano" o "generano" in modo ricorsivo le espressioni ben formate di un linguaggio.

- Alle formule della logica proposizionale possono essere associati dei valori di verità mediante una funzione di valutazione

Operatori e Notazione

- Esistono convenzioni diverse:

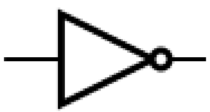
Negazione	**not A**	**¬ A**	**A !**	**– A**
Congiunzione	**A and B**	**A ∧ B**	**A & B**	**A × B**
Disgiunzione	**A or B**	**A ∨ B**	**A | B**	**A + B**
Disgiunzione esclusiva				
	A xor B		**A ^ B**	**A ⊕ B**

[equivale a **(A and (not B)) or ((not A) and B)]**

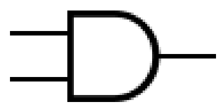
Implicazione (se ... allora)	**A → B**	**A ⊂ B**	**A ⇒ B**
Doppia implicazione (se e solo se)	**A ↔ B**	**A ≡ B**	**A ⇔ B**

Operatori

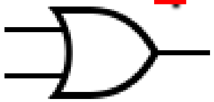
A	not A
0	1
1	0



A	B	A and B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



A	B	A or B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



A	B	A xor B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	$A \equiv B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A nand B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A	B	A nor B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Proprietà	AND (×)	OR (+)
Identità	A × 1 = A	A + 0 = A
Elemento nullo	A × 0 = 0	A + 1 = 1
Idempotenza	A × A = A	A + A = A
Inverso	A × (-A) = 0	A + (-A) = 1
Commutativa	A × B = B × A	A + B = B + A
Associativa	A × (B × C) = (A × B) × C	A+(B+C) = (A+B)+C
Distributiva	A × (B+C) = (A × B)+(A × C)	A+(B × C) = (A+B) × (A+C)
Assorbimento	A × (A + B) = A	A + (A × B) = A
De Morgan	-(A × B)=(-A)+(-B)	-(A+B)=(-A) × (-B)

Dualità

Dalle proprietà degli operatori AND e OR si deduce il principio di dualità:

Se un’espressione è valida lo è anche l’espressione che si ottiene da quella di partenza cambiando tutti gli 0 in 1 e viceversa e cambiando tutti gli AND in OR e viceversa.

Ex:

Identità	A x 1 = A	A + 0 = A

Espressioni booleane

- I termini booleani posso essere combinati tra loro utilizzando gli operatori per costruire espressioni booleane

- Le espressioni booleane (a differenza di quelle numeriche) possono essere rappresentate in forma esaustiva: ogni termine può assumere solo valore 0 o 1 ➔ ogni espressione di n variabili può avere solo 2^n configurazioni diverse

- Le configurazioni possono essere riportate nelle tabelle della verità, in cui vengono rappresentati appunto i valori di verità dell'espressione

Tabella della verità (I)

a	b	c	a × b	-a × c	(a × b) + (-a × c)
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F
F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F
T	T	F	T	F	T
T	T	T	T	F	T

Tabella della verità (II)

a	b	c	a + c	a + (-b)	(a + c) × (a + (-b))
F	F	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

Proprietà delle espressioni booleane

- Equivalenza
  - Due espressioni booleane sono **equivalenti** se hanno la medesima tabella della verità
- Tautologia
  - Un'espressione booleana è una **tautologia** se è sempre vera
    Esempio: **A OR (NOT A)**
- Contraddizione
  - Un'espressione booleana è una **contraddizione** se è sempre falsa
    Esempio: **A AND (NOT A)**

Dalla tabella all'espressione

- Conosciamo la tabella, ma non sappiamo qual è l'espressione
- Ci basta trovare una delle espressioni equivalenti che hanno questa tabella della verità

a	b	c	espressione
F	F	F	F
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	F
T	F	T	T
T	T	F	T
T	T	T	T

Dalla tabella all’espressione

Procedura:

1. identificazione di tutte le righe che hanno valore T;
2. per ogni riga identificata si costruisce una sottoespressione prodotto (and) di tutte le lettere che sono prese nella loro forma naturale o complementata seguendo i seguenti principi:
   - le lettere che nella riga in esame hanno valore T sono prese nella forma naturale;
   - le lettere che nella riga in esame hanno valore F sono prese nella forma complementare;
3. le sottoespressioni prodotto così ottenute vengono sommate (or) tra loro per realizzare l’espressione desiderata.

Dalla tabella all'espressione (1)

	a	b	c	espressione
riga 0	F	F	F	F
riga 1	F	F	T	F
riga 2	F	T	F	F
riga 3	F	T	T	T
riga 4	T	F	F	F
riga 5	T	F	T	T
riga 6	T	T	F	T
riga 7	T	T	T	T

Dalla tabella all'espressione (2)

	a	b	c	espressione		
riga 0	F	F	F	F		
riga 1	F	F	T	F		
riga 2	F	T	F	F		
riga 3	**F**	**T**	**T**	**T**	↭	(-a) × b × c
riga 4	T	F	F	F		
riga 5	**T**	**F**	**T**	**T**	↭	a × (-b) × c
riga 6	**T**	**T**	**F**	**T**	↭	a × b × (-c)
riga 7	**T**	**T**	**T**	**T**	↭	a × b × c

Dalla tabella all'espressione (3)

	a	b	c	espressione	
riga 0	F	F	F	F	
riga 1	F	F	T	F	
riga 2	F	T	F	F	
riga 3	**F**	**T**	**T**	**T**	↜ $m_1 = (-a) \times b \times c$
riga 4	T	F	F	F	
riga 5	**T**	**F**	**T**	**T**	↜ $m_2 = a \times (-b) \times c$
riga 6	**T**	**T**	**F**	**T**	↜ $m_3 = a \times b \times (-c)$
riga 7	**T**	**T**	**T**	**T**	↜ $m_4 = a \times b \times c$

$expr = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$

$expr = ((-a) \times b \times c) + (a \times (-b) \times c) + (a \times b \times (-c)) + (a \times b \times c)$

Verifica

a	b	c	$m_1 =$ (-a) × b × c	$m_2 =$ a × (-b) × c	$m_3 =$ a × b × (-c)	$m_4 =$ a × b × c	$m_1 + m_2 + m_3 + m_4$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	F	T	F	T
T	T	T	F	F	F	T	T

Un’espressione equivalente

a	b	c	a × b	a × c	b × c	(a × b) + (a × c) + (b × c)
F	F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T