# Corso di Sistemi
# Modulo di Sistemi a Eventi Discreti
# (ex Metodi di Specifica)
# Esercizi

Laurea magistrale in Ingegneria e Scienze informatiche

Tiziano Villa

Anno Accademico 2015-16

Questo documento in costruzione riporta una traccia (ancora incompleta) di quesiti ed esercizi come aiuto alla preparazione dello scritto.

Attualmente sono inclusi esercizi sulle reti di Petri e sul controllo supervisore.

1. Esercizi sulle reti di Petri.

   Una rete di Petri marcata e' specificata da una quintupla: $\{P, T, A, w, x\}$, dove $P$ sono i posti, $T$ le transizioni, $A$ gli archi, $w$ la funzione di peso sugli archi, e $x$ il vettore di marcamento (numero di gettoni per posto). $I(t_i)$ indica l'insieme dei posti in ingresso alla transizione $t_i$, $O(t_j)$ indica l'insieme dei posti in uscita dalla transizione $t_j$.

   Per associare un linguaggio a una rete di Petri s'introduce un insieme di eventi $E$, una funzione che etichetta le transizioni con eventi $l : T \to E$, e un insieme di stati che accettano $X_m \subseteq N^n$ ($n$ e' il numero di posti).

   (a) Si consideri la rete di Petri $P_1$ definita da:
   - $P = \{p_1, p_2\}$
   - $T = \{t_1\}$
   - $A = \{(p_1, t_1), (t_1, p_2)\}$
   - $w(p_1, t_1) = 2$, $w(p_2, t_1) = 1$

   i. Si disegni il grafo della rete di Petri $P_1$ con la marcatura $x_1 = [1, 0]$.

   (b) Si consideri la rete di Petri $P_2$ definita da:
   - $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$
   - $A = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_2, t_2), (p_2, t_3), (p_2, t_5), (p_4, t_5), (t_1, p_1), (t_1, p_2), (t_2, p_3), (t_3, p_3), (t_3, p_4), (t_4, p_3), (t_5, p_1)\}$
   - $w(p_1, t_1) = 1, w(p_1, t_2) = 1, w(p_2, t_2) = 1, w(p_2, t_3) = 2, w(p_2, t_5) = 1$, $w(p_4, t_5) = 1$, $w(t_1, p_1) = 1$, $w(t_1, p_2) = 1$, $w(t_2, p_3) = 1$, $w(t_3, p_3) = 1, w(t_3, p_4) = 1, w(t_4, p_3) = 1, w(t_5, p_1) = 1$

   i. Si disegni il grafo della rete di Petri $P_2$.

   (c) Si consideri la rete di Petri $P_4$ definita da:
   - $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
   - $A = \{(p_1, t_1), (p_1, t_3), (p_2, t_2), (p_3, t_2), (p_3, t_3), (p_4, t_3), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_2, p_2), (t_2, p_4)\}$
   - $w(p_1, t_1) = 1, w(p_1, t_3) = 1, w(p_2, t_2) = 1, w(p_3, t_2) = 1, w(p_3, t_3) = 1$, $w(p_4, t_3) = 1$, $w(t_1, p_2) = 1$, $w(t_1, p_3) = 1$, $w(t_2, p_2) = 1$, $w(t_2, p_4) = 1$

i. Si disegni il grafo della rete di Petri $P_4$ con stato iniziale $x_0 = [2, 0, 0, 1]$. Quali transizioni sono abilitate all'inizio ?
Si faccia scattare la transizione $t_1$. Quali transizioni sono abilitate dopo lo scatto di $t_1$ ? Si faccia seguire lo scatto di $t_2$. Quali transizioni sono abilitare ora ?
Ritornando a dopo lo scatto di $t_1$, si faccia ora scattare $t_3$. Quali transizioni sono abilitare ora ?
Si scriva la matrice d'incidenza di $P_3$ con stato iniziale $x_0 = [2, 0, 0, 1]$ e se ne calcoli l'evoluzione in forma matriciale se sono fatte scattare in sequenza le transizioni $t_1, t_2, t_1$. Si ripeta il calcolo facendo scattare in sequenza le transizioni $t_1, t_2, t_3$. Si commentino i risultati.

(d) Si consideri la rete di Petri $P_{10}$ definita da:

- $P = \{p_1, p_2\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_1, t_2), (p_1, t_3), (p_2, t_2), (t_1, p_2), (t_3, p_1)\}$
- $w(p_1, t_1) = 1, w(p_1, t_2) = 1, w(p_1, t_3) = 1, w(p_2, t_2) = 1, w(t_1, p_2) = 1, w(t_3, p_1) = 1$

i. Si disegni il grafo della rete di Petri $P_{10}$ con la marcatura $x_1 = [1, 0]$.

ii. Si classifichino in base alla vitalita' ("liveness") le seguenti transizioni (cioe' si dica se sono $L0$-vive, $L1$-vive, $L2$-vive, $L3$-vive, $L4$-vive):
  - Transizione $t_1$
  - Transizione $t_2$
  - Transizione $t_3$

iii. La rete di Petri $P_{10}$ e' persistente ?

(e) Si consideri la rete di Petri $P_{12}$ definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_2, t_3), (p_3, t_3), (t_1, p_2), (t_1, p_3), (t_2, p_1), (t_3, p_3), (t_3, p_4)\}$
- $w(p_1, t_1) = 1, w(p_2, t_2) = 1, w(p_2, t_3) = 1, w(p_3, t_3) = 1, w(t_1, p_2) = 1, w(t_1, p_3) = 1, w(t_2, p_1) = 1, w(t_3, p_3) = 1, w(t_3, p_4) = 1$

i. Si disegni il grafo della rete di Petri $P_{12}$ con la marcatura $x_1 = [1, 0, 0, 0]$.

ii. Si discuta la costruzione dell'albero di raggiungibilita' di $P_{12}$.

iii. Si disegni l'albero di copertura di $P_{12}$.

(f) Si consideri la rete di Petri $P_{14}$ definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
- $A = \{(p_1, t_2), (p_2, t_2), (p_3, t_3), (t_1, p_1), (t_2, p_3), (t_3, p_2)$
- $w(p_1, t_2) = 1, w(p_2, t_2) = 1, w(p_3, t_3) = 1, w(t_1, p_1) = 1, w(t_2, p_3) = 1, w(t_3, p_2) = 1$

i. Si disegni il grafo della rete di Petri $P_{14}$ con la marcatura $x_1 = [0, 1, 0]$.

ii. Si discuta la costruzione dell'albero di raggiungibilita' di $P_{14}$.

iii. Si disegni l'albero di copertura di $P_{14}$.

iv. La rete di Petri $P_{14}$ e' limitata ?

v. La rete di Petri $P_{14}$ e' conservativa ?

(g) Si considerino la rete di Petri $P_{15a}$ definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (t_1, p_2), (t_2, p_1), (t_2, p_3)$
- $w(p_1, t_1) = 1, w(p_2, t_2) = 1, w(t_1, p_2) = 1, w(t_2, p_1) = 1, w(t_2, p_3) = 1$

e la rete di Petri $P_{15b}$ definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$
- $T = \{t_1, t_2\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (t_1, p_2), (t_2, p_1), (t_2, p_3)$
- $w(p_1, t_1) = 1, w(p_2, t_2) = 1, w(t_1, p_2) = 1, w(t_2, p_1) = 1, w(t_2, p_3) = 2$

i. Si disegni il grafo della rete di Petri $P_{15a}$ con la marcatura $x_1 = [1, 0, 0]$.

ii. Si discuta la costruzione dell'albero di raggiungibilita' di $P_{15a}$.

iii. Qual e' la successione di marcature raggiungibili nel posto $p_3$ in $P_{15a}$ ?

iv. Si disegni l'albero di copertura di $P_{15a}$.

v. Si disegni il grafo della rete di Petri $P_{15b}$ con la marcatura $x_1 = [1, 0, 0]$.

vi. Si discuta la costruzione dell'albero di raggiungibilita' di $P_{15b}$.

vii. Qual e' la successione di marcature raggiungibili del posto $p_3$ in $P_{15b}$ ?

viii. Si disegni l'albero di copertura di $P_{15b}$.

ix. Si confrontino gli alberi di copertura di $P_{15a}$ e $P_{15b}$, e si commenti sulla capacita' dell'albero di copertura di discriminare tra stati raggiungibili e quindi di rispondere a domande su proprieta' di sicurezza.

(h) Si consideri la rete di Petri $P_{16}$ definita da:

- $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- $T = \{t_1, t_2, t_3\}$
- $A = \{(p_1, t_1), (p_2, t_2), (p_3, t_1), (p_4, t_3), (t_1, p_2), (t_2, p_3), (t_2, p_4), (t_3, p_1)$
- $w(p_1, t_1) = 1, w(p_2, t_2) = 1, w(p_3, t_1) = 1, w(p_4, t_3) = 1, w(t_1, p_2) = 1, w(t_2, p_3) = 1, w(t_2, p_4) = 1, w(t_3, p_1) = 1$

i. Si disegni il grafo della rete di Petri $P_{16}$ con la marcatura $x_1 = [1, 0, 0, 0]$.

ii. Si scriva la matrice d'incidenza di $P_{16}$ dato lo stato iniziale $x_0 = [1, 0, 0, 0]$.

iii. Dato lo stato $x = [0, 0, 0, 1]$, si risolva l'equazione $vA = x - x_0$, dove le incognite sono le componenti intere non-negative del vettore $v$.
Qual e' il significato del vettore $v$ ? Che cosa possiamo dedurre in questo caso dalla risoluzione dell'equazione precedente ?
L'esistenza di $v$ e' necessaria affinche' sia possibile raggiungere $x$ da $x_0$ ? L'esistenza di $v$ e' sufficiente affinche' sia possibile raggiungere $x$ da $x_0$ ?

iv. Si ripeta l'esercizio del punto precedente con $x' = [0, 1, 0, 0]$, cioe' si risolva l'equazione $vA = x' - x_0$.

2. Esercizi sul controllo supervisore.

   **Notazione**

   Un automa deterministico e' rappresentato da

   $$G = (X, E, f, \Gamma, x_0, X_m)$$

   dove

   - $X$ e' l'insieme degli stati
   - $E$ e' l'insieme degli eventi
   - $f : X \times E \to E$ e' la funzione di transizione (puo' essere parziale sul suo dominio); $f(x, e) = y$ indica che c'e' una transizione etichettata da $e$ dallo stato $x$ allo stato $y$
   - $\Gamma : X \to 2^E$ e' la funzione degli eventi attivi; $\Gamma(x)$ e' l'insieme degli eventi $e$ per cui $f(x, e)$ e' definito o insieme attivo di $G$ in $x$
   - $x_0$ e' lo stato iniziale
   - $X_m \subseteq X$ e' l'insieme degli stati marcati

   Se $X$ e' finito l'automa si dice a stati finiti.

   Il linguaggio generato da $G$ e'

   $$\mathcal{L}(G) = \{s \in E^\star : f(x_0, s) \text{ e' definito}\}$$

   Il linguaggio marcato da $G$ e'

   $$\mathcal{L}_m(G) = \{s \in \mathcal{L}(G) : f(x_0, s) \in X_m\}$$

   Un automa non-deterministico e' rappresentato da

   $$G = (X, E \cup \{\epsilon\}, f_{nd}, \Gamma, X_0, X_m)$$

   dove

   - $f_{nd} : X \times E \cup \{\epsilon\} \to 2^X$, per cui $f_{nd}(x, e) \subseteq X$ dove e' definito
   - $X_0 \subseteq X$, cioe' ci puo' essere piu' di uno stato iniziale

   Il prefisso di un linguaggio $L$ si puo' indicare come pref$(L)$, prefisso$(L)$, oppure $\overline{L}$.

**Definition 0.1** *Siano $K$ e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi $E$, con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che $K$ e' controllabile rispetto a $M$ e $E_{uc}$, se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha*

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

*[equivalente a $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]*

**Definition 0.2** *Siano $K$ e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi $E$, con $E_c \subseteq E$, $E_o \subseteq E$, e la proiezione $P : E^\star \to E_o^\star$. Si dice che $K$ e' osservabile rispetto a $M$, $E_o$, $E_c$, se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_c$ si ha*

$$s\sigma \notin \overline{K} \ \wedge s\sigma \in M \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K} = \emptyset.$$

.

(a) i. Sia $E = \{u, b\}$, $M = \overline{\{ub, bu\}}$, $E_{uo} = \{u\}$, $E_{uc} = \{b\}$, $K_1 = \{bu\}$.
Si disegnino i diagrammi degli automi che riconoscono $M$ e $K_1$.
Il linguaggio $K_1 = \{bu\}$ e' controllabile rispetto a $M$ e $E_{uc}$ ?
Il linguaggio $K_1 = \{bu\}$ e' osservabile rispetto a $M$, $E_o$ e $E_c$ ?
Traccia di soluzione.
$K_1$ e' controllabile: all'inizio si disabilita $u$ e poi si riabilita.
Per stabilire se $K_1$ e' osservabile si ragioni come segue. Si considerano tutte le stringhe $s \in \overline{K_1}$ e $\sigma \in E_c$.
La stringa $s = \epsilon \in \overline{K_1}$ puo' essere estesa fuori da $\overline{K_1}$ con l'evento controllabile $\sigma = u$, inoltre $s\sigma = \epsilon u = u \in M$. Pero' non c'e' nessuna altra stringa in $\overline{K_1}$ con un prefisso che abbia la stessa proiezione del prefisso $\epsilon$ e che termini in $u$. Percio' per questi $s, \sigma$

$$P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_1} = \emptyset$$

che soddisfa la condizione di osservabilita'
(nel dettaglio
$P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K_1} = P^{-1}[P(\epsilon)]u \cap \{\epsilon, b, bu\} = P^{-1}[\epsilon]u \cap \{\epsilon, b, bu\} = \{u^\star\}u \cap \{\epsilon, b, bu\} = \emptyset$).
Lo stesso vale per $s = b$, cioe' non c'e' nessun evento controllabile che estende $s$ in $M$ ma non in $\overline{K_1}$.
Lo stesso vale per $s = bu$.
Segue che $K_1$ e' osservabile.

ii. Sia $E = \{u, b\}$, $M = \overline{\{ub, bu\}}$, $E_{uo} = \{u\}$, $E_{uc} = \{u\}$, $K_2 = \{ub\}$.
Si disegnino i diagrammi degli automi che riconoscono $M$ e $K_2$.
Il linguaggio $K_2 = \{ub\}$ e' controllabile rispetto a $M$ e $E_{uc}$ ?
Il linguaggio $K_2 = \{ub\}$ e' osservabile rispetto a $M$, $E_o$ e $E_c$ ?
Si supponga ora di modificare $E_{uc}$ come segue: $E_{uc} = \{b\}$. $K_2$ e' controllabile ? $K_2$ e' osservabile ?
Traccia di soluzione.
$K_2$ e' controllabile: all'inizio si disabilita $b$ e poi si riabilita.
Per stabilire se $K_2$ e' osservabile si ragioni come segue. Se si considera $s = \epsilon$, $\sigma = b \in E_c$, si ha $s\sigma = \epsilon b = b \in M \setminus \overline{K_2}$, ma $s' = u \in P^{-1}[P(s)]$ (poiche' $u \in E_{uo}$) e $s'\sigma = ub \in M \cap \overline{K_2}$.
Segue che $K_2$ non e' osservabile.
Se si modifica $E_{uc}$ come $E_{uc} = \{b\}$, allora $K_2$ sarebbe incontrollabile, perche' non si puo' disabilitare l'evento $b$ iniziale per impedire che si

produca la parola $bu$ che non e' nella specifica.
Che cosa si puo' dire circa l'osservabilita' di $K_2$ ? Si considerano tutte le stringhe $s \in \overline{K_2}$ e $\sigma \in E_c$.
La stringa $s = \epsilon \in \overline{K_2}$ non puo' essere estesa fuori da $\overline{K_2}$ con l'evento controllabile $\sigma = u$; per la stringa $s = u \in \overline{K_2}$ si ha $s\sigma = uu \notin \overline{K_2}$ e $s\sigma = uu \notin M$; per la stringa $s = ub \in \overline{K_2}$ si ha $s\sigma = ubu \notin \overline{K_2}$ e $s\sigma = ubu \notin M$. Segue che $K_2$ e' osservabile. Intuitivamente: $K_2$ e' osservabile, perche' la verifica di osservabilita' e' condotta solo rispetto agli eventi controllabili, in altri termini siccome fallisce prima la controllabilita' non e' l'osservabilita' limitata a impedire ad un supervisore di mantenere l'impianto all'interno della specifica.

(b) Il problema del gatto e topo nel labirinto.

Ci sono due agenti mobili, diciamo un gatto e un topo, che si muovono in un labirinto. Il labirinto e' mostrato in Fig. 1: ha cinque stanze che comunicano tramite porte, ciascuna delle quali e' traversata nella direzione indicata in figura esclusivamente dal gatto (porte di tipo $c_i$) o esclusivamente dal topo (porte di tipo $m_j$). Il gatto e il topo si possono modellare ciascuno con un automa i cui stati sono le stanze, e le cui transizioni rappresentano lo spostamento da una stanza all'altra. L'automa in Fig. 2 e' ottenuto dall'intersezione degli automi del gatto e del topo. supponendo che inizialmente il gatto e' nella stanza 2 e il topo e' nella stanza 4r. Ogni stato dell'automa composto corrisponde alla coppia di stanze $(r_c, r_m)$, dove $r_c$ e' la stanza attuale del gatto e $r_m$ e' la stanza attuale del topo; c'e' un transizione dallo stato $(r_c, r_m)$ allo stato $(r'_c, r_m)$ (o allo stato $(r_c, r'_m)$) per l'evento $c_i$ (o $m_j$) se il gatto (o il topo) varca la porta $c_i$ (o $m_j$) per andare nella stanza $r'_c$ (o $r'_m$). Non abbiamo disegnato l'automa per intero per motivi di spazio, tuttavia quanto mostrato e' sufficiente per comprendere la procedura che segue. Tutte le porte possono essere aperte o chiuse da parte del controllore, tranne la porta bidirezionale $c_7$ che e' sempre aperta, cioe' $c_7$ e' incontrollabile mentre tutte le altre porte sono controllabili. L'obiettivo e' di progettare il controllore supervisore piu' generale che soddisfa le seguenti due proprieta:

i. Il gatto e il topo non sono mai contemporaneamente nella stessa stanza.
ii. E' sempre possibile per il gatto e per il topo ritornare allo stato iniziale $(2, 4)$.

Si puo' ottenere il controllare iterando dei passi di eliminazione di stati illegali fino a raggiungere un punto fisso. Inizialmente si compone l'automa del labirinto con l'automa della specifica del sistema (il gatto e il topo non sono nella stessa stanza, e c'e' un percorso per tornare allo stato iniziale). Il risultato della composizione e' che si eliminano tutti gli stati con il gatto e il topo nella stessa stanza: (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)) (mentre non ci sono stati da eliminare per l'altra condizione sulla possibilita' di raggiungere lo stato iniziale). Quando si elimina uno stato bisogna anche eliminare tutte le transzione che partono da esso. Dopo aver operato la potatura iniziale, si ripete il passo seguente fino alla convergenza a un punto fisso.

- Se si e' eliminata una transizione etichettata da un evento incontrollabile (perche' diretta a uno stato eliminato), si eliminano anche lo stato da cui la transizione parte e tutte le altre transizioni da esso.

- Si eliminano tutte le transizioni dirette a uno stato eliminato.
- Si eliminano tutti gli stati irrangiubili dallo stato iniziale e tutti gli stati non co-raggiungibili (cioe' quelli da cui non si puo' raggiungere uno stato che accetta).

Nel nostro esempio, sono necessari i seguenti passi per raggiungere un punto fisso:

i. Passo 1:
Eliminare lo stato (1,3), perche' la sua transizione incontrollabile a (3,3) per l'evento $c_7$ deve essere eliminata (poiche' (3,3) e' stato eliminato in precedenza), ed eliminare tutte le transizioni da (1,3); ne segue che gli stati nel sottografo radicato nello stato (1,0) sono resi irraggiungibili (nella figura non si mostra il sottografo radicato in (1,0) per non affollare troppo il disegno).
Eliminare le transizioni a stati precedentemente rimossi, ad es. eliminare dallo stato (0,3) le transizioni a (3,3) per $c_4$ e a (0,0) per $m_6$.
Eliminare gli stati irraggiungibile, ad es. lo stato (1,0) e i suoi successori.

ii. Passo 2:
Eliminare lo stato (0,3) perche' non e' co-raggiungibile, in quanto dopo la rimozione di (1,3) lo stato (0,3) e' diventato uno stato bloccante senza transizioni uscenti, ed eliminare tutte le transizioni ad esso.

Quello che rimane e' il controllore supervisore mostrato in Fig. 3. In ogni stato alcune porte devono essere aperte o chiuse, mentre per le porte rimanenti e' indifferente (a parte naturalmente $c_7$ che e' incontrallabile e quindi sempre aperta), secondo le seguente indicazioni:

**(2,4):** $c_3 = 1$, $m_5 = 1$, $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = -$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_6 = -$

**(0,4):** $c_1 = 1$, $c_4 = 1$, $m_5 = 0$, $c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = -$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_6 = -$

**(1,4):** $c_2 = 1$, $m_5 = 0$, $c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = -$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_6 = -$

**(3,4):** $c_5 = 0$, $m_5 = 0$, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_6 = -$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_6 = -$

**(2,0):** $c_3 = 0$, $m_1 = 0$, $m_4 = 1$, $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = -$, $m_2 = m_3 = m_5 = m_6 = -$

**(2,3):** $c_3 = 0$, $m_6 = 1$, $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = -$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = -$

Queste scelte permettono la massima flessibilita' per il gatto e il topo. all'interno delle condizioni dettate dalla specifica. Si puo' ottenere un controllore ridotto con la fusione di stati seguente: In a reduced version of the controller the states are merged as follows:

$S_0$ **= {(2,4)}:** $c_3 = 1$, $m_5 = 1$, $c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = -$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_6 = -$

$S_1$ **= {(0,4),(1,4),(3,4),(2,0),(2,3)}:** $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_4 = 1$, $c_3 = 0$, $c_5 = 0$, $m_1 = 0$, $m_5 = 0$, $m_4 = 1$, $m_6 = 1$, $c_6 = -$, $m_2 = m_3 = -$

La riduzione degli stati avviene a scapito di restringere la flessibilita, cioe' di perdere dei gradi di liberta' nella realizzazione del supervisore. Il controllore ridotto e' mostrato in Fig. 4.

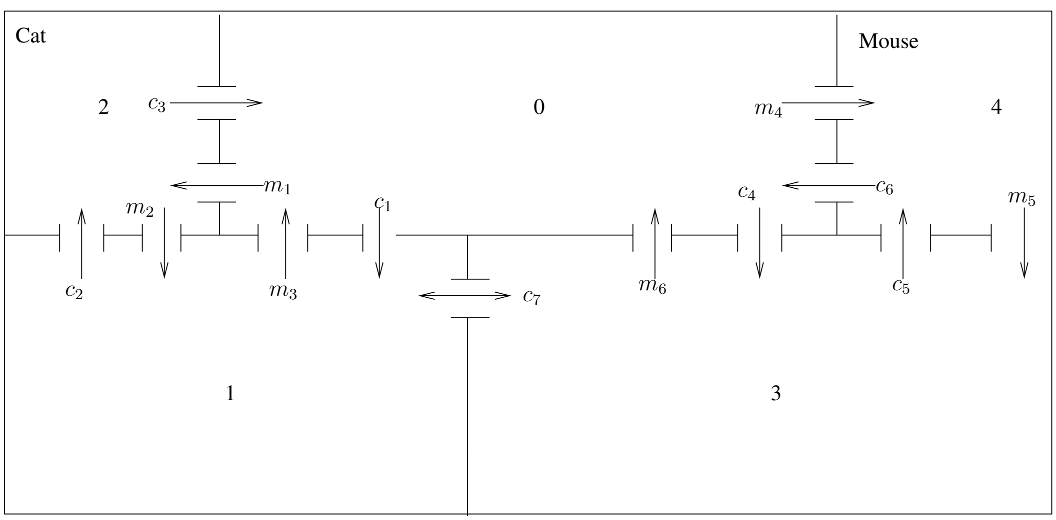


Figure 1: Labirinto con il gatto e il topo.

(c) Si consideri un impianto $G$ con $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma_u = \{b\}$, $L(G) = \overline{a^\star b a^\star}$ (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe dell'espressione regolare $a^\star b a^\star$), $L_m(G) = a^\star b a^\star$.

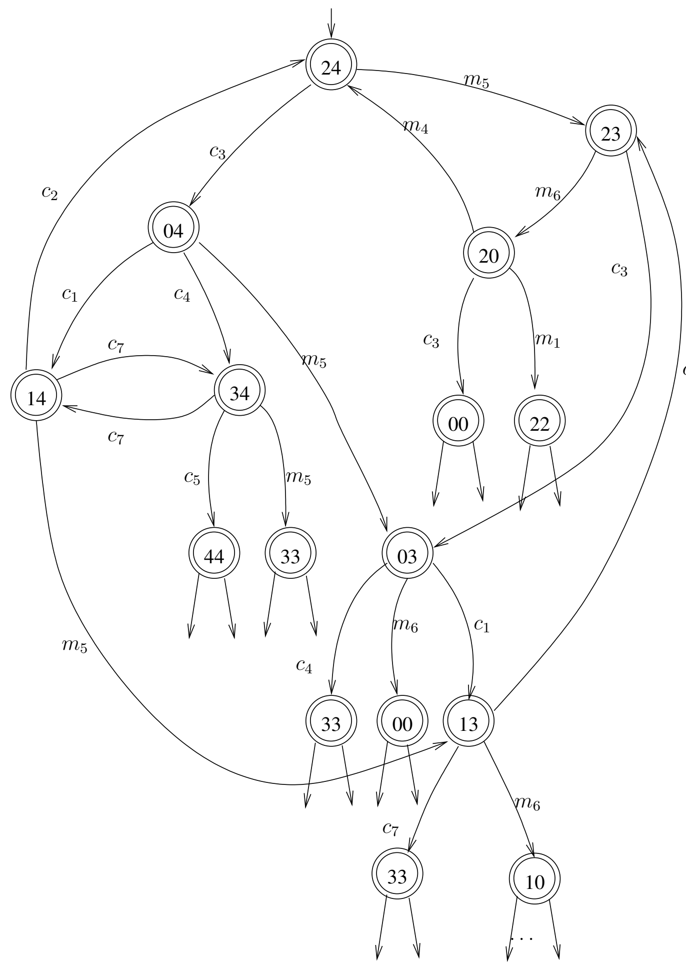


Figure 2: Frammento dell'automa del labirinto con il gatto e il topo.

Si supponga che la specifica (il linguaggio generato desiderato) sia $K = \overline{\{a^kba^k, k \geq 0\}} \subseteq L(G)$, cioe' si richiede che l'impianto controllato generi prefissi di stringhe con un numero uguale di $a$ che precedono e seguono un unico $b$.

Il linguaggio $K$ e' controllabile ? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi al caso.

Si enunci il teorema di esistenza di un supervisore sotto controllabilita' limitata. Esiste un supervisore $S$ tale che l'impianto controllato generi il linguaggio $K$ ? Si mostri un tale supervisore $S$ se esiste, e si descriva in breve la sua strategia di controllo.

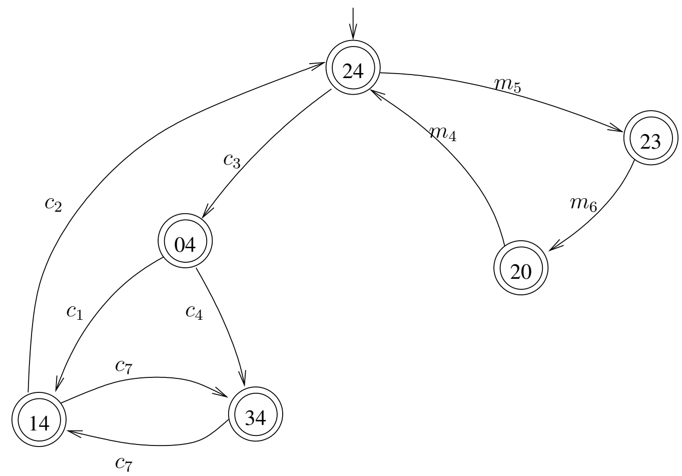


Figure 3: Supervisore del problema del gatto e topo.

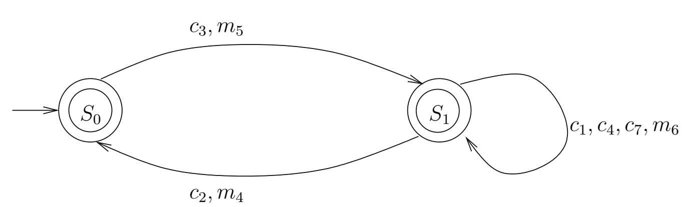


Figure 4: Supervisore ridotto del problema del gatto e topo.