## A1 Teorema della varietà quoziente

**Dettagli**

Sia data un'azione di $G$ gruppo di Lie
su una varietà $M$, che sia

- liscia
- libera $\quad g \cdot p = p \Rightarrow g = e \Leftrightarrow G_p = \{e\} \;\forall p \in M$
- propria (condizione di Hausdorff) — orbite s.varietà lisce

Allora $M/G$, sp. delle orbite, è una varietà topologica

$$\dim M/G = \dim M - \dim G$$

e possiede un'unica struttura di varietà liscia
tale che $\pi : M \to M/G$ divenga una sommersione
(π è suriettiva)

summersione
submersion

liscia (i.e. $\pi_*$ suriettivo)

**TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE**
Prof. M. Spera (a.a. 2009/10)
Lezione **A7**

Ricordiamo anche che l'applicazione

$$\pi : M \longrightarrow M/G$$

è aperta

Infatti, sia $\bar{U}$ aperto $\subset M$ vogliamo dimostrare che $\pi(\bar{U}) \subset M/G$ è aperto (per la topologia quoziente)

consideriamo $\pi^{-1}(\underset{M/G}{\pi(\bar{U})}) = \bigcup_{g \in G} \underbrace{g \cdot \bar{U}}_{\Theta_g(\bar{U})}$

$\Theta_g$ è un omeomorfismo $\forall g \Rightarrow \Theta_g(\bar{U}) = g \cdot \bar{U}$ è aperto $\forall g \in G \Rightarrow \pi^{-1}(\pi(\bar{U}))$ è aperto in $M$ (è unione di aperti)

Ma ciò significa che $\pi(\bar{U})$ è aperto in $M/G$ (def. di topologia quoziente), i.e., $\pi$ è aperta

1. Unicità della struttura differenziabile

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ (M/G)_1 \arrow[rr, bend left, "Id"] & & (M/G)_2 \arrow[ll, dashed, bend left, "Id^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Id è liscia per le proprietà delle summersioni

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "F\circ\pi"] & \\ N \arrow[r, "F"'] & P \end{tikzcd}$$

$F$ è liscia $\Leftrightarrow$ $F\circ\pi$ è liscia

($\pi$ sommersione suriettiva)

lo è anche $Id^{-1}$ $\Rightarrow$ $1 = 2$

2. $M/G$ è una varietà topologica

◇ $M/G$ è a base numerabile : sia $\{U_i\}$ una base numerabile
second countable la topologia di $M$.

Allora $\{\pi(U_i)\}$ è una base, numerabile, per la topologia di $M/G$ :
infatti $\pi$ è aperta $\Rightarrow$ $\pi(U_i)$ è aperto. Sia $O \subset M/G$
$O$ aperto. allora $\pi^{-1}(O)$ è aperto in $M$ $\Rightarrow$

$$\pi^{-1}(O) = \bigcup_{j\in J} U_j \qquad \underbrace{\pi\left(\pi^{-1}(O)\right)}_{\displaystyle \| \atop O} = \bigcup_{j\in J} \pi(U_j)$$

$\Rightarrow$ conclusione.

◇ $M/G$ è Hausdorff : si $\mathcal{O}$ = $\{(g\cdot p, p)\}_{p\in M,\ g\in G}$
relazione orbitale, grafico

È noto che in generale, se $X$ è Hausdorff, e $\sim$ è aperta, i.e. $\pi : X \to X/\sim$ è aperta
$X/\sim$ è Hausdorff $\Leftrightarrow$ $R_\sim = \{(x,y) \,/\, x\sim y\}$ è chiuso

Sia ora $(g_i \cdot p_i, p_i) \to (q, p)$ convergente

ma poiché $\Theta$ è propria, $\exists$ s.s. $g_j \to g$

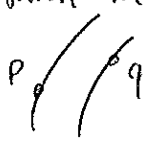
$\Rightarrow (g_j p_j, p_j) \to (q, p) = (g \cdot p, p) \in \mathcal{O}$

la s. succ. converge allo stesso limite — sicché $\mathcal{O}$ è chiuso e $M/G$ è Hausdorff.

‖ Da qui si vede che la richiesta che $\Theta$ sia propria è stata
‖ concepita proprio per assicurare la proprietà di Hausdorff a $M/G$.

variante: poiché le applicazioni continue e proprie sono chiuse (per le var. topologiche), $\mathcal{O}$ è chiusa, e concludo come prima.

Se non si ricorda l'argomento generale, lo richiamiamo subito qui:

Siano $\pi(p), \pi(q)$ distinti in $M/G$. $p$ e $q$ vivono allora in orbite distinte  sia ora $U \times V \ni (p,q)$ aperto

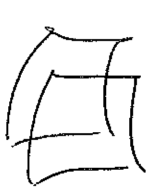
t.c. $U \times V \in M \times M \setminus \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ è chiusa)

ma allora $\underset{\substack{\Psi \\ \pi(p)}}{\overset{\text{aperto}}{\pi(\bar{U})}} \cap \underset{\substack{\Psi \\ \pi(q)}}{\overset{\text{aperto}}{\pi(\bar{V})}} \overset{(\pi \text{ è aperta})}{=} \emptyset \Rightarrow M/G$ è Hausdorff.

Il vic. è altrettanto semplice

‖ $M/G$ è localmente euclideo

Preliminarmente, mostriamo che le $G$-orbite sono sottovarietà immerse (embedded) di $M$ (inclusioni..)



orbit map
applicazione orbitale $\quad \Theta^{(p)} : G \longrightarrow M$

$p \in M \qquad g \longmapsto g \cdot p$

$\Theta^{(p)}$ è un'inclusione liscia $\qquad \Theta^{(p)}$ è liscia.
embedding

☆ $\Theta^{(p)}$ è iniettiva : $\quad \Theta^{(p)}(g) = \Theta^{(p)}(g')$
$$gp = g'p$$

$$\Rightarrow \quad g'^{-1} \cdot g \cdot p = p \quad \Rightarrow \quad g'^{-1} \circ g = e$$
i.e. $\quad g = g'$

||| poiché $\Theta^{(p)}$ è libera (gruppo di isotropia banale)

inoltre
$$\Theta^{(p)}(g'g) = g'g \circ p = g'(g \circ p)$$
$$= g' \, \Theta^{(p)}(g)$$

($G$-equivarianza risp. a $\Theta^{(p)}$)
equivariance

||| Per il teorema equivariante del rango
equivariant rank theorem

$\Theta^{(p)}$ ha rango costante $\quad \Rightarrow$ è un'immersione
immersion

⟶ Mostriamo che è propria, sicché, essendo iniettiva e di rango costante, sarà un'inclusione
embedding

Sia $K \subset M$ compatto: $\Theta^{(p)^{-1}}(K)$ è chiuso in $G$ (continuità), ed è contenuto in $G_{K \cup \{p\}}^{(*)}$, che è

$\left[ {}^{(*)} G_{K\cup\{p\}} = \{ g \mid \exists\ p' \in K \cup \{p\} \text{ t.c. } g p' \in K \cup \{p\} \} \right]$

compatto, è anch'esso compatto, epperò $\Theta^{(p)}$ è propria

(quindi)
hence

---

Caso: $F : M \to N$ immersione iniettiva

sia (a) $M$ compatta

oppure (b) $F$ propria

allora $F$ è un'inclusione, con immagine chiusa.

Dim. nel caso (b), ciò segue dal fatto che se $F : M \to N$ è propria e continua ($M, N$ varietà topologiche), allora l'immagine $F(M) \subset N$ è chiusa. Vediamo quest'ultima asserzione. Sia $y \in \overline{F(K)}$, $K$ chiuso.

Allora $\exists \{y_i = f(x_i)\}$ con $y_i \to y$. Sia $U \ni y$ precompatto se $i$ è suff. grande, $y_i = f(x_i) \in \bar{U} \subset \bar{U} \Rightarrow$

$x_i \in f^{-1}(\bar{U})$, che è compatto ($f$ è propria). Pertanto, passando ad una sottosuccessione, $x_i \to x \in M$.

Ma $K$ è chiuso, sicché $x \in K$. Ma allora

$F(x) = \lim_{i\to\infty} F(x_i) = \lim_{i \to \infty} y_i = y \in K$. Dunque $F(K)$ è chiuso.

(a): Si ricade in (b): se $K \subset N$ è compatto, $F^{-1}(K)$ è chiuso in $M$, dunque compatto ($M$ è compatta), ossia $F$ è propria.

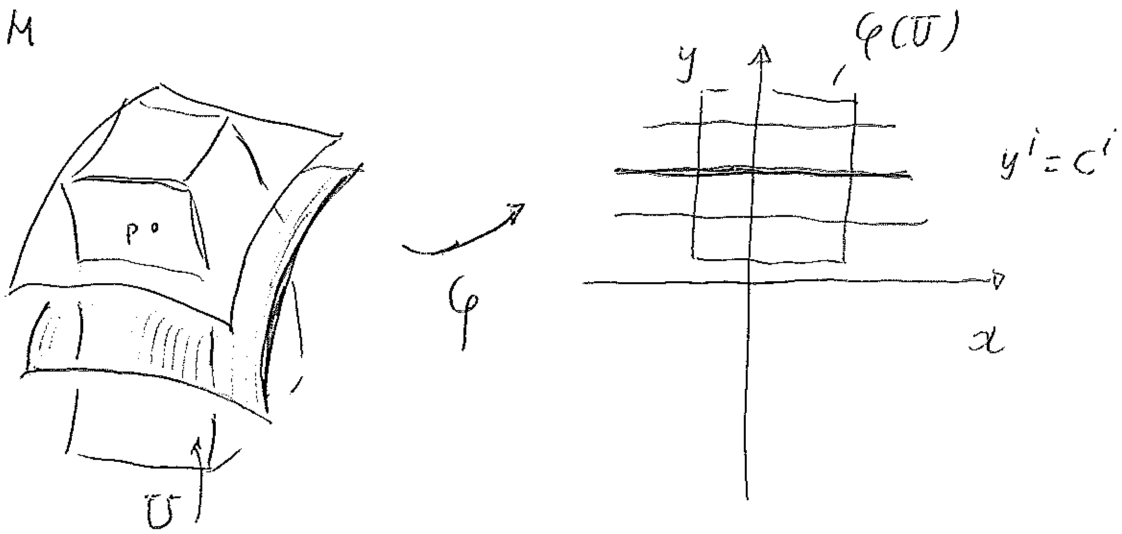
Dunque $\Theta^{(p)}$ è un'inclusione liscia

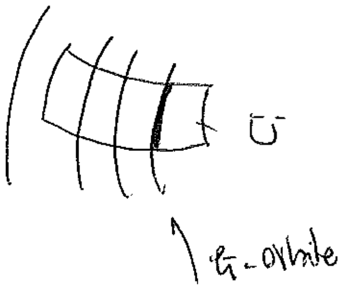
Sia $k = \dim G$ $\quad n = \dim M - \dim G$

una carta liscia $(U, \varphi)$ su $M$, con funzioni coordinate $(x, y) = (x^1 .. x^k, y^1 .. y^n)$ è detta adattata alla $G$-azione se
adapted

(i) $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ prodotto

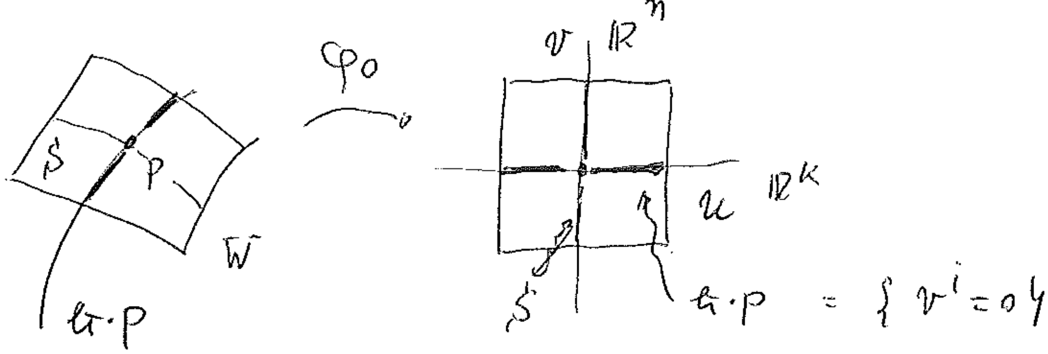
(ii) ogni $G$-orbita interseca $\varphi(U)$
o nell'insieme vuoto o in una singola fetta della forma $\{y^i = c^i\}$
(slice)



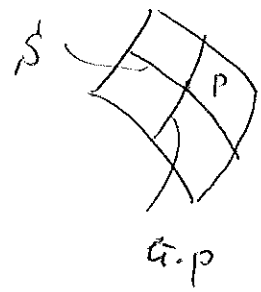




Mostreremo che $\forall\, p \in M$, esiste una carta siffatta

Cominciamo con lo scegliere, fissato $p \in M$, una fetta $(\tilde{W}, \varphi_0)$ centrata in $p$, per l'orbita $G\cdot p$
slice chart — coord: $(u^i, v^i)$




Consideriamo $S$, sottovarietà di $\tilde{W}$, definita da $\boxed{u^i = 0}$ (v. figura).




Si ha $T_pM = \underbrace{T_p(G\cdot p)}_{\langle \frac{\partial}{\partial u^i} \rangle} \oplus \underbrace{T_pS}_{\langle \frac{\partial}{\partial v^i} \rangle}$

Sia $\psi : G \times S \longrightarrow M$ la restrizione di $\theta$ (azione)

Mostreremo che $\psi$ è un diffeomorfismo in un intorno di $(e, p)$. Sia

$$i_p : G \longrightarrow G \times S, \quad g \longmapsto (g, p)$$

(è un embedding)

$\theta^{(p)} = \psi \circ i_p$ mappa orbitale è un embedding

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i_p"] \arrow[rr, bend right, "\theta^p"'] & G \times S \arrow[r, "\psi"] & M \end{tikzcd}$$

$$g \longmapsto (g, p) \longmapsto g\cdot p$$

$$\theta^{(p)}_{*}(T_e G) = T_p(G\circ p) \subset T_p M$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Im}\psi_* \supset T_p(G\cdot p)}$$

Se poi consideriamo $j_e : S \longrightarrow G\times S$ (embedding)
$q \longmapsto (e, q)$

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{j_e} & G\times S & \xrightarrow{\psi} & M \\ q & \longmapsto & (e,q) & \longmapsto & e.q = q \end{array}$$

$i$ $\quad i : S \hookrightarrow M$

$$i = \psi \circ j_e$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Im}\psi_* \supset T_p S}$$ Dato che $T_p(G\cdot p)\oplus T_p S = T_p M$

Si ha subito $\boxed{\operatorname{Im}\psi_* = T_p M}$, i.e.

$\psi_*$ è suriettiva $\Rightarrow$ (N+R) $\psi_*$ è biunivoca

In virtù del teorema della funzione inversa

$\exists$ (senza perdere in generalità) $G\times S \supset X\times Y \ni (e,p)$

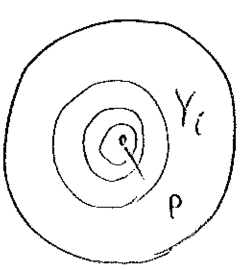
e $M \supset U$ t. che $\psi : X\times Y \longrightarrow U$ sia un diffeomorfismo

possono essere scelti in modo da essere diffeom a sfere aperte

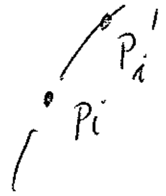
4 Il punto cruciale è questo: $Y \subset S$ può essere scelto in modo da incontrare ogni $G$-orbita in al più un punto.

Per assurdo, supponiamo che ciò sia falso.

Sia $\{Y_i\}$ una base di intorni di $p$, contenuta in $Y$




$\forall i \quad \exists \quad p_i \neq p_i' \in Y$ nella stessa orbita.




$p_i' = g_i \cdot p_i \qquad g_i \in G$

ovviamente $\quad p_i' \to p \leftarrow p_i$ .

Poiché $\Theta$ è propria, passando ad una sottosuccessione,

$g_i \to g \qquad$ sicché

$$g \cdot p = \lim_{i\to\infty} g_i p_i = \lim_{i\to\infty} p_i' = p$$

$g \cdot p = p$. ma l'azione è libera $\Rightarrow g = e$

Dunque, per $i$ suff. grande, $g_i \in X$, ma ciò viola l'iniettività di $\Psi = \Theta|_{X \times Y}$ :

violates injectivity

$$\Theta_{g_i}(p_i) = g_i p_i = p_i' = \Theta_e(p_i')$$

$$\boxed{\Theta(g_i, p_i) = \Theta(e, p_i')}$$

ma $p_i' \neq p_i$

Siano $\alpha : \mathbb{B}^k \to X$ diffeomorfismi
$\beta : \mathbb{B}^n \to Y$

sfere aperte..

$$\gamma : \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^n \longrightarrow U$$

$$\gamma(x,y) = \theta_{\alpha(x)}(\beta(y))$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^n \arrow[r, "\underset{\alpha\times\beta}{\text{diffeo}}"] \arrow[rr, bend right, "\gamma"'] & X \times Y \arrow[r, "\underset{\Psi}{\text{diffeo}}"] & U \end{tikzcd}$$

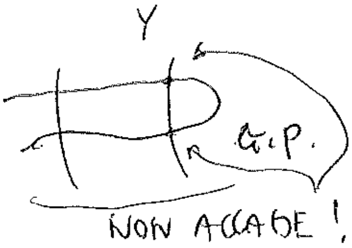
* $\gamma$ è un diffeomorfismo.

$$\boxed{\text{Sia } \varphi = \gamma^{-1} \text{ : è una carta coordinata } G\text{-adattata :}}$$

(i) è ovvia

(ii) $y = c$ $\subset$ singola orbita, poiché è della forma $\theta(X \times \{p_0\}) \subset \theta(G \times \{p_0\}) = G \cdot p_0$

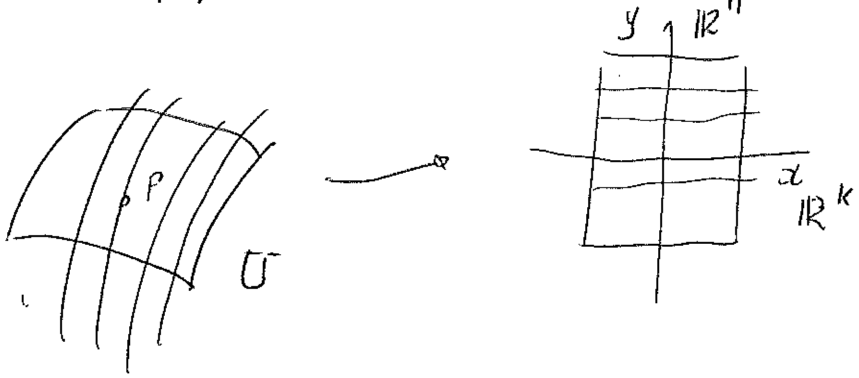
$p_0$ : Se un'orbita interseca $U$, lo fa in un'unione di fette $y = c$; ma un'orbita interseca $Y$ solo una volta, e dato che $y = c$ ha un pto in $Y$, ogni orbita interseca $U$ al più in una fetta.



Dunque: $\exists$ sistema di carte coordinate adattate.

Sia ora $q \in M/G \qquad q = \pi(p)$

Sia $(U, \varphi)$ una carta adattata centrata in $p$.

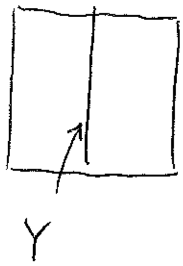



$\varphi(U) = U_1 \times U_2$

$V := \pi(U)$ è aperto in $M/G$ ($\pi$ è aperta)

$\varphi \rightsquigarrow (x^1 \dots x^k, y^1 \dots y^n)$

$Y \subset U : \{ x^i = 0 \}$




$\pi : Y \to V$ bigettiva

bijective

Se $W \subset Y$ aperto, $\pi(W) = \pi\{(x,y) : (0,y) \in W\}$ è aperto in $M/G$

$\Rightarrow \pi|_Y$ è omeomorfismo

$\sigma := (\pi|_Y)^{-1} : V \longrightarrow Y \subset U$ è una sezione locale di $\pi$

$(\pi \circ \sigma = id)$

Definiamo

$$\eta : V \longrightarrow \bar{U}_2 :$$

$$[(x,y)] \longmapsto y$$

$$\eta : \pi_2 \circ \varphi \circ \sigma$$

omeo da $Y$ a $\bar{U}_2$

$\pi_2 \circ \varphi$

omeo

$$\begin{array}{ccccccc} & (\pi_Y)^{-1} & Y & & & & \\ [p] & \overset{\sigma}{\longmapsto} & p & \underset{\text{adattata}}{\overset{\varphi}{\longmapsto}} & (x,y) & \overset{\pi_2}{\longmapsto} & y \end{array}$$


Conclusione: $\eta$ è un omeomorfismo

Dunque $M/G$ è una varietà topologica

✦ Struttura liscia, $\pi$ sommersione

Si usi l'atlante testé costruito

si ha, localmente $\pi : (x, y) \to y$

che è una sommersione.

Verifichiamo la compatibilità

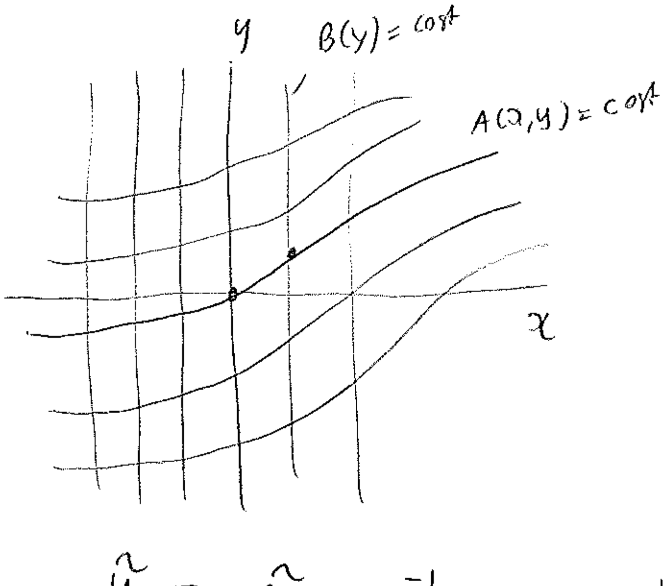
siano $(U, \varphi)$, $(\hat{U}, \hat{\varphi})$ carte adattate, e

$(\bar{V}, \eta)$ $(\hat{V}, \hat{\eta})$ le carte corrispondenti di $M/G$

se le carte sono centrate su uno stesso pto $p$, si vede facilmente che

$$\Downarrow$$

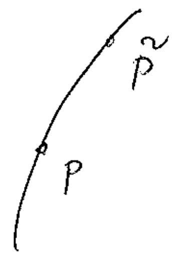
$$(\hat{x}, \hat{y}) = (A(x,y), B(y))$$




Si ha $\hat{y} = \hat{\eta} \circ \eta^{-1} y$, che è liscia

Nel caso generale, siano $p \in U$
$\tilde{p} \in \tilde{U}$

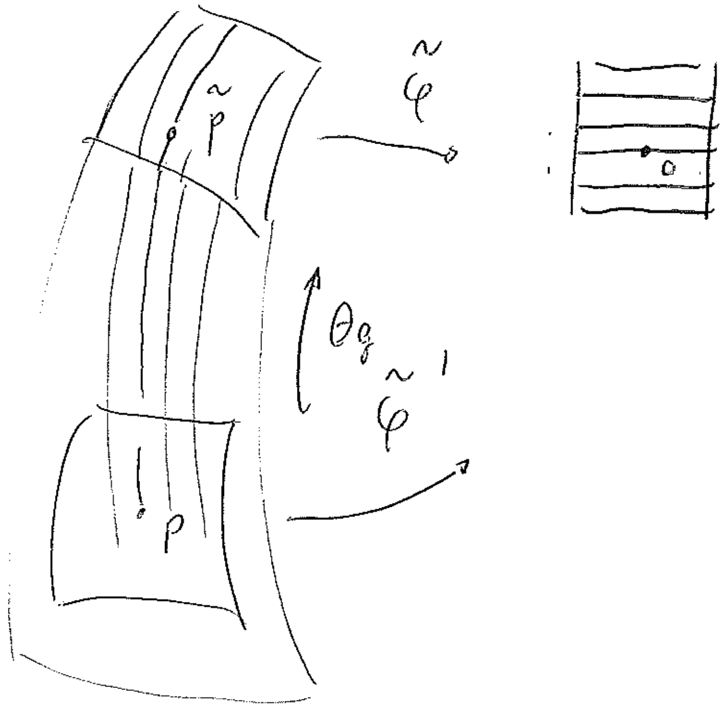
$$\pi(p) = \pi(\tilde{p}) = q$$




possiamo assumere che le carte siano centrate in $p$ e $\tilde{p}$

ora $\tilde{p} = g \cdot p$ per qualche $g$

$\tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi} \circ \theta_g$ è una carta centrata in $p$ adattata




inoltre $\tilde{\sigma}' = \theta_g^{-1} \circ \sigma$ sezione locale

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}' &= \pi_2 \circ \tilde{\varphi}' \circ \tilde{\sigma}' = \\ &= \pi_2 \circ \tilde{\varphi} \circ \cancel{\theta_g} \circ \cancel{\theta_g^{-1}} \tilde{\sigma} \\ &= \tilde{\eta}. \end{aligned}$$

Siamo nella situazione precedente, e di nuovo il cambiamento di carte è liscio $\square$