TUTOR : mercoledì 8:30 → 10:30 lab. DELTA
1) introduzione Matlab
2) errori di macchina in Matlab

OSSERVAZIONE Abbiamo visto che per $x \in \mathbb{R}$ che rientra nel range di $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ la corrispondente rappresentazione macchina $fl(x)$ soddisfa

$$\left| \frac{fl(x) - x}{x} \right| \leq eps$$

Da questo, risulta che esiste un $0 \leq \bar{\epsilon} \leq eps$ tale che

$$\frac{fl(x) - x}{x} = \pm \bar{\epsilon}$$

ossia

$$fl(x) = x \pm \bar{\epsilon} x$$
$$= (1 \pm \bar{\epsilon})\, x$$

$\| \epsilon$ con $-eps \leq \epsilon \leq eps$

e quindi

$$\boxed{fl(x) = x(1+\epsilon) \quad \text{con} \quad -eps \leq \epsilon \leq eps}$$

ESEMPIO Calcoliamo

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x \, dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

È

$$I_0 = \frac{1}{e} \int_0^1 x^0 \cdot e^x dx = \frac{1}{e} \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{e} \left[e^x \right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{e} \left[e^1 - e^0 \right] = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632121$$

Cerco una relazione ricorsiva che lega I_n a I_{n-1}

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n (e^x)' dx =$$

$$= \frac{1}{e}\left\{\left[x^n e^x\right]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} e^x dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{e}\left\{1^n \cdot e^1 - \cancel{0^n e^0} - n\int_0^1 x^{n-1} e^x dx\right\} =$$

$$= \frac{1}{e}\cdot e - n \cdot \frac{1}{e}\int_0^1 x^{n-1} e^x dx =$$

$$= 1 - n I_{n-1}, \quad n \geq 1$$

Quindi, posso usare questa relazione per calcolare I_n a partire da I_0:

$$I_1 = 1 - 1 \cdot I_0 = 1 - I_0$$

$$I_2 = 1 - 2 \cdot I_1$$

$$I_3 = 1 - 3 \cdot I_2 \quad \text{eccetera}$$

Questo modo di calcolare gli I_n, funziona quando lavoro in aritmetica di macchina oppure no?
In altri termini, è un algoritmo stabile o instabile?
Facciamo due considerazioni.

1. $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$ perché

$$0 < I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 \underset{\geq 0}{x^n e^x}\, dx \leq \frac{e}{e}\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(n+1)} \to 0$$

($\leq x^n \cdot e$)

e si conclude col teorema del confronto.

$x^n e^x \leq x^n \cdot e$ in $[0,1]$ perché

$e^0 \leq e^x \leq e^1 \Rightarrow 1 \leq e^x \leq e \Rightarrow x^n \leq x^n e^x \leq x^n \cdot e \Rightarrow$

$$x^n e^x \leq x^n \cdot e \quad \text{in } [0,1]$$

2. I_0 viene memorizzato nel computer (viene rappresentato nel sistema floating point) con un errore perché è un numero irrazionale (in $\mathbb{F}$ ho solo numeri razionali): allora è

$$\hat{I}_0 = fl(I_0) = I_0(1+\epsilon_0)$$

Calcoliamo I_1 nel sistema $\mathbb{F}$:

$$\hat{I}_1 = 1 - 1 \cdot I_0 = 1 - I_0(1+\epsilon_0) =$$

$$= \underbrace{(1 - I_0)}_{\text{valore vero di } I_1} - \underbrace{\boxed{I_0 \epsilon_0}}_{\text{errore}} = I_1 - \epsilon_0 I_0$$

$$\hat{I}_2 = 1 - 2 \cdot \hat{I}_1 = 1 - 2(I_1 - \epsilon_0 I_0) =$$

$$= (1 - 2I_1) + 2\epsilon_0 I_0$$

$$= I_2 + \underbrace{2\epsilon_0 I_0}_{\text{errore su } I_2}$$

$$\hat{I}_3 = 1 - 3\hat{I}_2 = 1 - 3(I_2 + 2\epsilon_0 I_0) =$$

$$= \underbrace{\boxed{(1 - 3I_2)}}_{\text{valore vero di } I_3} \underbrace{\boxed{- 2 \cdot 3\, \epsilon_0 I_0}}_{\text{errore}}$$

$$= I_3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \epsilon_0 I_0$$

$\vdots$

$$\hat{I}_n = I_n + (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n\, \epsilon_0 I_0$$

$$= I_n + \underbrace{\boxed{(-1)^n \cdot n!\, \epsilon_0 I_0}}_{\text{errore}}$$

Ora, al crescere di I_n dovrei avere che $I_n \to 0$ ma trovo che $\hat{I}_n$, la rappresentazione macchina di I_n, diverge a ∞ a causa di $n!$ che

amplifica l'errore iniziale $\epsilon_0 I_0$.
L'algoritmo è INSTABILE.

RIMEDIO: considero ancora

$$I_n = 1 - n I_{n-1}$$

e la risolvo rispetto a I_{n-1}:

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n}$$

Considero $I_N = 0$ per $N >> n$ e applico la formula per calcolare I_n partendo da I_N.

$$I_N = 0 \longleftarrow \text{c'è un errore!}$$

$$I_{N-1} = \frac{1 - I_N}{N}$$

$$I_{N-2} = \frac{1 - I_{N-1}}{N-1}$$

$$\vdots$$

$$I_n = \frac{1 - I_{n+1}}{n+1}$$

Vediamo al calcolatore

$$\hat{I}_N = 0 + \epsilon_N I_N$$

$$\hat{I}_{N-1} = \frac{1 - \hat{I}_N}{N} = \frac{1 - 0 - \epsilon_N I_N}{N}$$

$$= I_{N-1} \underbrace{- \frac{\epsilon_N I_N}{N}}_{\text{errore}}$$

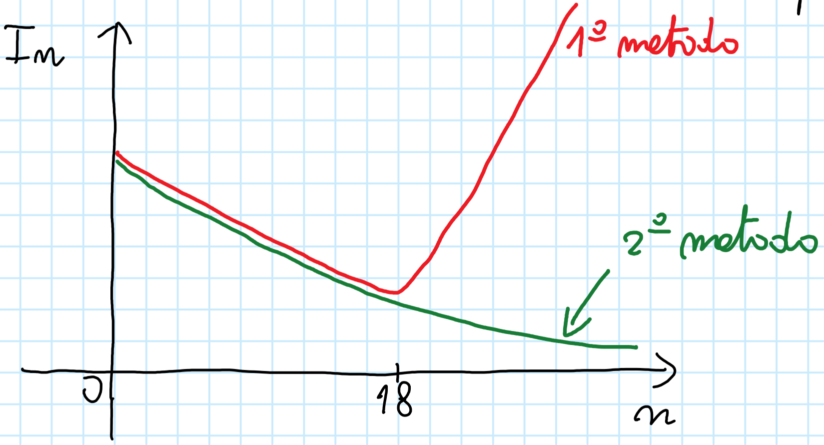
$$\hat{I}_{N-2} = \frac{1 - \hat{I}_{N-1}}{N-1} = \frac{1 - I_{N-1} + \frac{\epsilon_N I_N}{N}}{N-1} =$$

$$= I_{N-2} + \frac{\epsilon_N I_N}{N(N-1)}$$

In questo modo l'errore iniziale viene ridotto ad ogni passo. Arrivo a I_0 con un errore che è

$\frac{\varepsilon_N I_N}{N!}$ (a parte il segno).

Al calcolatore si vede una situazione del tipo



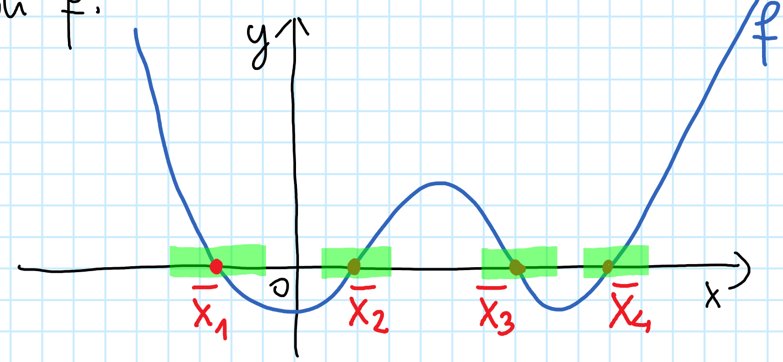
EQUAZIONI NON LINEARI

Il problema è trovare le radici della equazione

$$f(x) = 0.$$

Il numero $\bar{x}$ è radice se $f(\bar{x}) = 0$.
Il problema è formato da due parti distinte

1. SEPARAZIONE DELLE RADICI: per ogni radice, trovo un intervallo che la contiene (e NON ne contiene altre!).
   Per noi, la via più semplice è utilizzare il grafico di f.



La separazione porta a individuare i 4 intervalli verdi ognuno dei quali contiene una sola radice o zero di f.
È interessante, per i metodi che seguono, che gli intervalli

abbiamo una ampiezza piccola.

2. APPROSSIMIAMO, per ogni intervallo, la radice contenuta in quell'intervallo.

È utile ricordare il

TEOREMA Se f è continua nell'intervallo $[a, b]$ ed è $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora c'è sicuramente almeno un punto $\bar{x} \in (a, b)$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.
Inoltre, se f è monotona in senso stretto, allora $\bar{x}$ è unico (solo condizione sufficiente!).

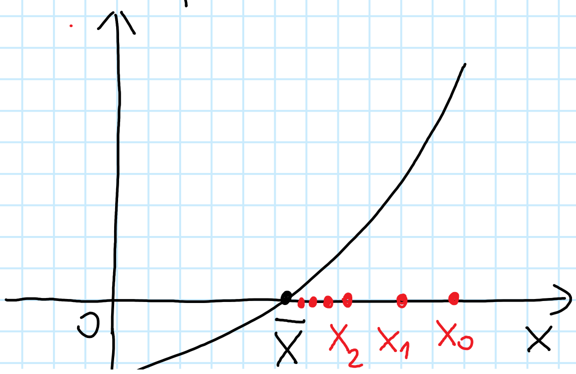
DEFINIZIONE Sia x_n una successione che converge a $\bar{x}$. Chiamiamo ERRORE al passo n la quantità ε_n data da

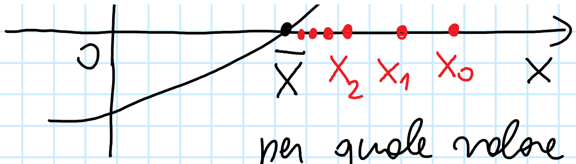
$$\varepsilon_n = \bar{x} - x_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Naturalmente, $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$ perché assumiamo che x_n converge a $\bar{x}$.

IDEA PER APPROSSIMARE LE RADICI

Costruiamo una successione di numeri reali x_n che, sotto certe ipotesi, converge alla radice $\bar{x}$.
Primo problema: dato che $\bar{x}$ NON è nota, quando mi fermo nella successione x_n?





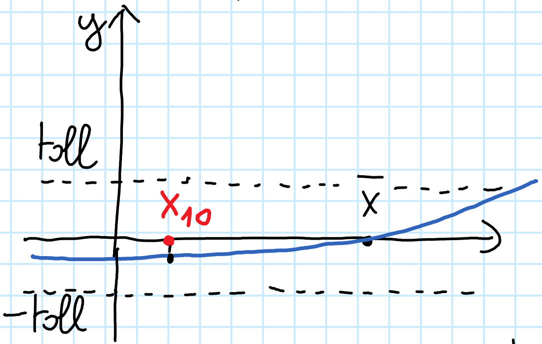
per quale valore di x_n mi fermo?

$\Downarrow$

CRITERI DI ARRESTO

Ci sono due tipici criteri di arresto

a) Mi fermo quando $|f(x_n)| \leq toll$ dove toll è un numero piccolo.



Posso avere $f(x_{10})$ piccolo, ad esempio minore di toll, ma essere ancora lontano da $\bar{x}$.

In questa situazione, il criterio di arresto è soddisfatto questo significa che prendo come approssimazione di $\bar{x}$ il valore x_{10} che però è lontano da $\bar{x}$. Il criterio di arresto, in questo caso, ha fallito.

b) Mi fermo quando $|x_{n+1} - x_n| \leq toll$ con toll numero piccolo assegnato.

Attenzione! può essere soddisfatto anche se x_n è divergente!

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$