Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2014/2015
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 8

25 novembre 2014

1. (a) Si calcoli il grado dell'estensione $[L : \mathbb{Q}]$ e si determini una $\mathbb{Q}$-base di L nei casi seguenti:
   i. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3})$
   ii. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{i})$
   iii. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3}, i)$

   (b) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irriducibile di grado 3 che possiede un unico zero reale. Sia L il campo di riducibilità completa di f su $\mathbb{Q}$. Si determini $[L : \mathbb{Q}]$.

   (8 punti)

2. (a) Sia $K \subset F$ un'estensione di campi finita con $[F : K] = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che ogni polinomio $f \in K[x]$ di grado 3 con uno zero in F possiede già uno zero in K.

   (b) Sia $K \subset K(\alpha)$ un'estensione di campi di grado dispari. Si mostri che $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

   (c) Sia $u = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$. È vero che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^2)$?

   (8 punti)

3. Sia $u = \frac{3-i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$.

   (a) si trovi il polinomio minimo f di u su $\mathbb{Q}$

   (b) Si verifichi che $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(u)$.

   (c) $\mathbb{Q}(u)$ è campo di riducibilità completa per f?

   (d) si verifichi che $\mathbb{Q}(i) \subsetneq \mathbb{Q}(u)$

   (*8 punti*)

4. Sia $u = \sqrt[4]{8}$.

   (a) Si calcolino le radici del polinimio minimo g di u su $\mathbb{Q}$

   (b) Detto K il campo di riducibilità completa di g su $\mathbb{Q}$, si trovi $[K : \mathbb{Q}]$

   (*6 punti*)

5. Sia $K \subset F$ un'estensione e sia $K \subset L \subset F$ un campo intermedio.

   (a) Sia $K \subset F$ normale. Si dimostri che $L \subset F$ è normale. Anche $K \subset L$ è sempre normale?

   (b) Si dimostri che $K \subset F$ è separabile se e solo se $K \subset L$ e $L \subset F$ sono separabili.

   (**)

Consegna: giovedì 4 dicembre durante la lezione.