

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

9 Febbraio 2012

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	15	
problema 2	15	
totale	30	

1. (a) Si disegni il diagramma delle transizioni della macchina a stati finiti M_D con variabile d'ingresso $I = \{falso, vero\}$ e variabile d'uscita $U = \{falso, vero\}$ che modella un filo (produce in uscita il valore dell'ingresso corrente).

Si disegni il circuito sequenziale che realizza la macchina M_D (un circuito sequenziale e' una realizzazione strutturale con bistabili e porte logiche).

Traccia di soluzione.

M_D :

- stati: s_1 con s_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $X = \{falso, vero\}$, una variabile d'uscita $Y = \{falso, vero\}$;
- transizione da s_1 a s_1 : $falso/falso$,
transizione da s_1 a s_1 : $vero/vero$.

Per realizzare M_D basta un filo, cioe' una connessione dall'ingresso X all'uscita Y .

(b) Si considerino le seguenti macchine a stati finiti M_A , M_B e M_C .

M_A :

- stati: s_1, s_2 con s_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $X = \{falso, vero\}$, una variabile d'uscita $Y = \{falso, vero\}$;
- transizione da s_1 a s_1 : $vero/falso$,
transizione da s_1 a s_2 : $falso/falso$,
transizione da s_2 a s_2 : $falso/vero$,
transizione da s_2 a s_1 : $vero/vero$.

M_B :

- stati: s_1, s_2 con s_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $X = \{falso, vero\}$, una variabile d'uscita $Y = \{falso, vero\}$;
- transizione da s_1 a s_1 : $vero/falso$,
transizione da s_1 a s_2 : $falso/falso$,
transizione da s_2 a s_2 : $falso/vero$,
transizione da s_2 a s_1 : $vero/falso$.

M_C :

- stati: s_1, s_2 con s_1 stato iniziale;
- una variabile d'ingresso $X = \{falso, vero\}$, una variabile d'uscita $Y = \{falso, vero\}$;
- transizione da s_1 a s_1 : $vero/vero$,
transizione da s_1 a s_2 : $falso/falso$,
transizione da s_2 a s_2 : $falso/falso$,
transizione da s_2 a s_1 : $vero/vero$.

- i. Si disegnino i diagrammi delle transizioni e i circuiti sequenziali che realizzano le macchine M_A , M_B e M_C . Per ognuna si stabilisca se e' una macchina di Moore o di Mealy.

- ii. Si chiudano ad anello la macchina M_A con la macchina M_D , per cui l'uscita di M_A diventa l'ingresso di M_D e l'uscita di M_D diventa l'ingresso di M_A , per ottenere una macchina composta senza ingresso proprio e con uscita coincidente con quella di M_A . Si costruisca la macchina composta.

La composizione di M_A e M_D e' ben formata, cioe' per ogni stato e per ogni ingresso definisce una sola uscita ?

Si disegni il circuito sequenziale corrispondente alla macchina composta risultante.

Traccia di soluzione.

M_A e' una macchina di Moore che corrisponde a un bistabile di tipo D con un invertitore all'ingresso (supponendo di assegnare il codice 0 allo stato iniziale e il codice 1 all'altro stato).

Macchina composta $M_A \times M_D$:

- stati: $(s_{1a}, s_1), (s_{2a}, s_1)$ con (s_{1a}, s_1) stato iniziale;
- una variabile d'ingresso unaria $X = \{\bullet\}$ (l'orologio), una variabile d'uscita $Y = \{falso, vero\}$;
- transizione da (s_{1a}, s_1) a (s_{2a}, s_1) : $\bullet/falso$,
transizione da (s_{2a}, s_1) a (s_{1a}, s_1) : $\bullet/vero$.

La composizione di M_A e M_D e' ben formata, cioe' definisce una sola uscita per ogni stato e per ogni ingresso (risultato garantito in partenza dal fatto che M_A e' una macchina di Moore, condizione sufficiente per ottenere un punto fisso unico).

Digressione. In generale (usando la notazione in Lee-Varaiya) il problema e' trovare l'incognita $y(n) \in Outputs$ tale che

$$(s(n+1), y(n)) = update(s(n), y(n))$$

dove la difficolta' e' dovuta al fatto che $y(n)$ appare da entrambe le parti, cioe' sia come ingresso che come uscita. Una volta trovato $y(n)$, si puo' trovare $s(n+1)$ a partire dalla funzione $update$. Tale $y(n)$ se esiste si dice punto fisso, e per avere una composizione ben formata si chiede che esso sia unico.

iii. Si ripeta l'esercizio al punto precedente per la macchina M_B (al posto della macchina M_A).

Traccia di soluzione.

M_B e' una macchina di Mealy che corrisponde a un bistabile di tipo D con un invertitore all'ingresso, supponendo di assegnare il codice 0 allo stato iniziale e il codice 1 all'altro stato; sempre con la medesima codifica, l'uscita ha equazione $X'S$ dove S e' lo stato presente (uscita del bistabile).

Macchina composta $M_B \times M_D$:

- stati: $(s_{1b}, s_1), (s_{2b}, s_1)$ con (s_{1b}, s_1) stato iniziale;
- una variabile d'ingresso unaria $X = \{\bullet\}$ (l'orologio), una variabile d'uscita $Y = \{false, vero\}$;
- transizione da (s_{1b}, s_1) a (s_{2b}, s_1) : $\bullet/false$,
transizione da (s_{2b}, s_1) a $?: ?$.

La composizione di M_B e M_D non e' ben formata, cioe' non definisce una sola uscita per ogni stato e per ogni ingresso, poiche' nello stato (s_{2b}, s_1) non esiste un punto fisso.

Se si disegna il circuito sequenziale che si ottiene dal circuito che realizza M_B chiudendo l'uscita sull'ingresso, si vede che quando M_B e' nello stato (s_{1b}, s_1) , l'uscita $Y = 0$ e' consistente con lo stato presente di M_B a 0 e l'ingresso di M_B a 1 (l'ingresso di M_B e' l'uscita Y invertita), ma quando si cambia stato al successivo ciclo d'orologio si trova che lo stato presente di M_B va a 1, l'uscita U va a 1, poi l'ingresso di M_B va a 0, l'uscita di U va a 0, poi l'ingresso di M_B va a 1, l'uscita di U va a 1 e cosi' via in un'oscillazione perpetua che non si stabilizza. Si noti che il nostro modello a stati non cattura l'oscillazione, bensì mostra che la macchina si blocca, poiche' non ha il livello di dettaglio sufficiente a modellare l'oscillazione.

iv. Si ripeta l'esercizio per la macchina M_C (al posto della macchina M_A).

Alla fine si discutano brevemente i risultati delle tre composizioni.

Traccia di soluzione.

M_C e' una macchina di Mealy la cui uscita coincide con l'ingresso, cioe' corrisponde a un "filo" (funzione identita').

Macchina composta $M_C \times M_D$:

- stati: $(s_{1c}, s_1), (s_{2c}, s_1), (s_{2c}, s_2), (s_{1c}, s_2)$ con (s_{1c}, s_1) stato iniziale;
- una variabile d'ingresso unaria $X = \{\bullet\}$ (l'orologio), una variabile d'uscita $Y = \{false, vero\}$;
- transizione da (s_{1c}, s_1) a (s_{1c}, s_1) : $\bullet/vero$,
transizione da (s_{1c}, s_1) a (s_{2c}, s_1) : $\bullet/false$,
transizione da (s_{2c}, s_1) a (s_{3c}, s_1) : $\bullet/false$,
transizione da (s_{2c}, s_1) a (s_{1c}, s_1) : $\bullet/vero$.

La composizione di M_C e M_D non e' ben formata, cioe' non definisce una sola uscita per ogni stato e per ogni ingresso, poiche' per ogni ingresso si possono produrre entrambe le uscite *vero* e *false*.

Si noti che sia la macchina M_C che la macchina composta $M_C \times M_D$ si possono ridurre ad un solo stato.

Se si disegna il circuito sequenziale che si ottiene dal circuito che realizza M_C chiudendo l'uscita sull'ingresso, si ottiene un circuito ad anello costituito da un filo chiuso. Nella pratica esso si stabilizzera' a uno dei suoi valori possibili. Il nostro modello a stati esprime con il non-determinismo il fatto che ignoriamo a quale livello logico si stabilizzera' il circuito.

Si osservi che particolarmente in questi casi limite il modello a stati puo' modellare di piu' o di meno del comportamento fisico del circuito corrispondente.

2. Si consideri un impianto G con $\Sigma = \{a, b\}$, $\Sigma_{uc} = \{b\}$, $L(G) = \overline{a^*ba^*}$ (cioe' il linguaggio ottenuto dai prefissi delle stringhe dell'espressione regolare a^*ba^*), $L_m(G) = a^*ba^*$.

Si supponga che il linguaggio generato desiderato sia dato da $K^n = \{a^k, k > n\} \cup \{\overline{a^kba^*}, k \leq n\} \subseteq L(G)$, cioe' si richiede che l'impianto controllato blocchi l'evento b dopo $n + 1$ occorrenze iniziali dell'evento a .

- (a) Il linguaggio K^n e' controllabile? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi al caso.

Si mostrino il grafo di G e quello della specifica K^n per $n = 2$.

Traccia di soluzione

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc} , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

[equivalente a $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]

Per la definizione di controllabilita', si ha che K e' controllabile se e solo se \overline{K} e' controllabile.

Si applichi la definizione di controllabilita' al nostro esempio dove $M = L(G)$.

$K^n, n \geq 0$ non e' controllabile. Ad esempio, $a^{n+1} \in \overline{K^n}$, $a^{n+1}b \in L(G) \setminus \overline{K^n}$.

Intuitivamente, dopo che l'impianto produce l'evento a per $n + 1$ volte di seguito, dovrebbe disabilitare b per rimanere nella parte di specifica pertinente che e' $\{a^k, k > n\}$, ma non puo' farlo perche' b e' incontrollabile.

- (b) i. Si definisca $K^{\downarrow C}$, il sovralinguaggio controllabile (e chiuso rispetto al prefisso) infimo che contiene una data specifica K .

Traccia di soluzione.

Sia $\mathcal{CC}_{out}(K)$ la collezione dei sovralinguaggi di K chiusi rispetto al prefisso e controllabili, allora si definisce

$$K^{\downarrow C} = \bigcap_{L \in \mathcal{CC}_{out}(K)} L.$$

ii. Si scriva la formula per calcolare $K^{\downarrow C}$.

Traccia di soluzione.

$$K^{\downarrow C} = \overline{K} E_{uc}^* \cap L(G).$$

iii. Si applichi tale formula al problema del punto precedente con specifica K^n .

Traccia di soluzione.

Si deve calcolare

$$(K^n)^{\downarrow C} = \overline{K^n} E_{uc}^* \cap L(G),$$

dove

$$K^n = \{a^k, k > n\} \cup \overline{\{a^k b a^*, k \leq n\}}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \overline{K^n} E_{uc}^* &= \overline{\{a^k, k > n\} b^*} \cup \overline{\{a^k b a^*, k \leq n\} b^*} \\ &= \{a^k, k > n\} b^* \cup \overline{\{a^k b a^*, k \leq n\} b^*}. \end{aligned}$$

(Si noti che $\overline{\{a^k, k > n\} b^*} = \{b^*, ab^*, \dots, a^n b^*\} \cup \{a^k, k > n\} b^*$ e che $\{b^*, ab^*, \dots, a^n b^*\} \subseteq \overline{\{a^k b a^*, k \leq n\} b^*}$).

Da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \overline{K^n} E_{uc}^* \cap L(G) &= (\{a^k, k > n\} b^* \cup \overline{\{a^k b a^*, k \leq n\} b^*}) \cap L(G) \\ &= (\{a^k, k > n\} b^* \cup \overline{\{a^k b a^*, k \leq n\} b^*}) \cap \overline{a^* b a^*} \\ &= \overline{\{a^k b, k > n\}} \cup \overline{\{a^k b a^*, k \leq n\}}. \end{aligned}$$

(Si noti da un lato che

$$\{a^k, k > n\} b^* \cap \overline{a^* b a^*} = \{a^k, k > n\} \cup \{a^k b, k > n\},$$

e dall'altro che

$$\overline{\{a^k b, k > n\}} = \{a^k, k \leq n\} \cup \{a^k, k > n\} \cup \{a^k b, k > n\}$$

e che $\{a^k, k \leq n\} \subseteq \overline{\{a^k b a^*, k \leq n\}}$).

- iv. Si spieghi come tale formula suggerisca la costruzione di un automa che genera $K^{\downarrow C}$.

Traccia di soluzione.

Dati gli automi H e G che generano rispettivamente \overline{K} e M , si ottiene un automa che genera $K^{\downarrow C}$ con i seguenti passi:

- L'automata che genera $\overline{K}E_{uc}^*$ si ottiene aggiungendo un nuovo stato ad H e completando la sua funzione di transizione aggiungendo tutte le transizioni incontrollabili mancanti (dall'insieme di eventi attivo ad ogni stato di H) al nuovo stato. Nel nuovo stato si aggiungono anche auto-anelli per tutti gli eventi incontrollabili.
 - Si esegue il prodotto dell'automata ottenuto precedentemente con l'automata G .
- v. Applicando tale costruzione all'esempio del punto precedente con specifica K^n per $n = 2$, si costruisca l'automata che genera $(K^2)^{\downarrow C}$.

Traccia di soluzione.

Si applichi la costruzione del punto precedente all'automata che genera K^2 .