

# Esercizi di logica

Ivan Valbusa

5 dicembre 2012

Gli esercizi proposti di seguito coprono solo una piccola parte del programma del corso. Sono mediamente più difficili di quelli presenti sul manuale di logica e per essere svolti correttamente richiedono che si abbia una certa dimestichezza ed elasticità con i concetti fondamentali della logica enunciativa e del calcolo della deduzione naturale. A tal fine, tuttavia, è sufficiente aver svolto con impegno e costanza gli esercizi proposti nel manuale e durante le lezioni.

Ricordate poi che per tutte le formule è sempre possibile costruire una tavola di verità e trarre le dovute considerazioni: è una tautologia? è una contraddizione? È possibile trovare una formula equivalente? (Sì!) Consiglio di sforzarsi di essere creativi. Ogni formula, ogni esercizio, permette di creare infinite varianti. Si ricordi, per esempio, che l'applicazione dell'introduzione del condizionale fa diminuire il numero delle ipotesi e che per ogni schema di ragionamento corretto si può trovare il relativo teorema. Create tutte le varianti possibili e rifate l'esercizio lasciando passare del tempo (ma non troppo).

Nota tecnica: in alcuni casi si sono usate le metavariable ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ) al posto delle variabili ( $P, Q, R, \dots$ ). A rigore, quindi, alcune espressioni non sono in senso stretto formule ben formate. Tuttavia, per ogni espressione (ben formata) che usa metavariable è sempre possibile costruire almeno una formula ben formata.

## Esercizio 1

Si consideri la seguente espressione:

$$\alpha \vee \beta, (\gamma \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha \vee \beta \vdash \gamma \rightarrow \neg\alpha$$

Cosa possiamo affermare?

1. L'espressione rappresenta lo schema di un ragionamento corretto
2.  $\gamma \rightarrow \neg\alpha$  è una fbf sempre vera
3.  $\gamma \rightarrow \neg\alpha$  non è conseguenza logica di  $\alpha \vee \beta$  e  $(\gamma \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha \vee \beta$
4. L'espressione rappresenta una fbf

### Esercizio 2

Per ciascuno degli esercizi seguenti 1) stabilire, usando le tavole di verità, quali sono gli schemi di ragionamento validi e 2) dimostrarne la validità attraverso il calcolo della deduzione naturale.

(i)  $(R \rightarrow S) \rightarrow R, R \rightarrow S \vdash R$

#### Derivazione

(1)	1	$(R \rightarrow S) \rightarrow R$	Ass
(2)	2	$R \rightarrow S$	Ass
(3)	1, 2	$R$	1,2 E $\rightarrow$

(ii)  $(R \rightarrow S) \rightarrow R \vdash (R \rightarrow S) \rightarrow R$

#### Derivazione

(1)	1	$(R \rightarrow S) \rightarrow R$	Ass
(2)	2	$R \rightarrow S$	Ass
(3)	1, 2	$R$	1,2 E $\rightarrow$
(4)	1	$(R \rightarrow S) \rightarrow R$	2,3 I $\rightarrow$

Come si può notare, premessa e conclusione di questo ragionamento sono uguali. Ricavare il teorema applicando la regola dell'introduzione del condizionale (I $\rightarrow$ ). Qual'è il principio logico di cui questo ragionamento è un esempio? Scriverlo usando simboli di metavariable.

### Esercizio 3

Per ciascuno dei seguenti esercizi sostituire al posto di  $\star$  una variabile enunciativa in modo da ottenere uno schema di ragionamento corretto. Stabilirne la validità attraverso le tavole di verità e fornirne una dimostrazione con il calcolo della deduzione naturale.

1.  $P \rightarrow (Q \rightarrow \star), P \vdash \star \rightarrow R$
2.  $P \rightarrow (Q \rightarrow R), \star, \star \vdash R$
3.  $\alpha \rightarrow \star, \beta \rightarrow \star, \alpha \vdash \gamma$
4.  $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash \star \rightarrow \star$
5.  $\alpha \rightarrow \beta \vdash (\star \rightarrow \star) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

#### Esercizio 4

Cosa rappresenta la seguente espressione?

$$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

#### Esercizio 5

Dimostrare i seguenti schemi di ragionamento dopo averne attestato la validità.

1.  $\alpha \rightarrow \beta, \alpha \vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$

##### Derivazione

(1)	1	$\alpha \rightarrow \beta$	Ass
(2)	2	$\alpha$	Ass
(3)	3	$\beta \rightarrow \gamma$	Ass
(4)	1, 2	$\beta$	1,2 E $\rightarrow$
(5)	1, 2, 3	$\gamma$	3,4 E $\rightarrow$
(6)	1, 2	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$	3,5 I $\rightarrow$

Ottenere il rispettivo teorema applicando la regola dell'introduzione del condizionale (I $\rightarrow$ )

2. \*  $\beta \rightarrow \gamma, \beta \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

##### Derivazione

(1)	1	$\beta \rightarrow \gamma$	Ass
(2)	2	$\beta$	Ass
(3)	3	$\alpha \rightarrow \beta$	Ass
(4)	4	$\alpha$	Ass
(5)	2, 4	$\alpha \wedge \beta$	2,4 I $\wedge$
(6)	2, 4	$\alpha$	5 E $\wedge$
(7)	2, 3, 4	$\beta$	3,6 E $\rightarrow$
(8)	1, 2, 3, 4	$\gamma$	1,7 E $\rightarrow$
(9)	1, 2, 3	$\alpha \rightarrow \gamma$	4,8 E $\rightarrow$
(10)	1, 2	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	3,9 E $\rightarrow$

È possibile derivare la formula  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$  senza usare l'assunzione della riga (2)?

3.  $\vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$

4. \*  $\beta \wedge \neg\beta \vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$

### Esercizio 6

Trovare una formula che sostituita a  $\star$  renda le espressioni seguenti schemi di ragionamenti corretti. (Ovvero trovare una conclusione che dipenda logicamente dalle premesse.) Assicurarsi della soluzione trovata con delle tavole di verità.

1.  $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma), \alpha \wedge \beta \vdash \star$
2.  $\alpha, \beta, \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \vdash \star$

### Esercizio 7

Qual'è lo schema di ragionamento che corrisponde alle seguenti derivazioni? (Ovvero: trovare la sequenza del tipo  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \vdash \beta$  corretta.)

1.

#### Derivazione

(1)	1	$\alpha$	Ass
(2)	2	$\beta$	Ass
(3)	3	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	Ass
(4)	1, 3	$\beta \rightarrow \gamma$	1,3 $E\rightarrow$
(5)	1, 2, 3	$\gamma$	2,4 $E\rightarrow$

2.

#### Derivazione

(1)	1	$\alpha \rightarrow \gamma$	Ass
(2)	2	$\alpha \wedge \beta$	Ass
(3)	2	$\alpha$	2 $E\wedge$
(4)	1, 2	$\gamma$	1,3 $E\rightarrow$

3.

#### Derivazione

(1)	1	$\alpha \rightarrow \gamma$	Ass
(2)	2	$\alpha \wedge \beta$	Ass
(3)	2	$\alpha$	2 $E\wedge$
(4)	1, 2	$\gamma$	1,3 $E\rightarrow$
(5)	1	$\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma$	2,4 $I\rightarrow$

### Esercizio 8

Quali dei seguenti non sono schemi di ragionamenti corretti?

1.  $\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$
2.  $\alpha, \beta \vdash \alpha$
3.  $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
4.  $\vdash (\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$
5.  $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \vdash \neg\alpha$
6.  $\alpha \vdash \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$

### Esercizio 9

Trovare gli errori presenti nelle seguenti derivazioni. Gli errori possono essere omissioni o applicazioni errate delle regole del calcolo.

[Suggerimento: Eseguire le derivazioni e controllare il risultato ottenuto]

1.  $\alpha \rightarrow \neg\beta \vdash \beta \rightarrow \neg\alpha$

#### Derivazione

(1)	1	$\alpha \rightarrow \neg\beta$	Ass
(2)	2	$\beta$	Ass
(3)	3	$\alpha$	Ass (per assurdo)
(4)	1, 3	$\neg\beta$	1,3 E $\rightarrow$
(5)	1, 2	$\beta \wedge \neg\beta$	2,4 I $\wedge$
(6)	1, 3	$\beta$	2,3 I $\wedge$
(7)	1, 2	$\neg\alpha$	2,3 I $\neg$
(8)	1	$\beta \rightarrow \neg\alpha$	2,7 I $\rightarrow$

2.  $\alpha \wedge \neg\beta, \alpha \rightarrow \beta \vdash \neg\alpha$

#### Derivazione

(1)	1	$\alpha \wedge \neg\beta$	Ass
(2)	2	$\alpha \rightarrow \beta$	Ass
(3)	3	$\alpha$	Ass (per assurdo)
(4)	2, 3	$\beta$	2,3 I $\rightarrow$
(5)	1	$\neg\beta$	1 E $\wedge$
(6)	2, 3	$\beta \wedge \neg\beta$	4,5 E $\wedge$
(7)	1, 2	$\neg\alpha$	3,5,6 I $\neg$

**Esercizio 10**

Dimostrare la seguente sequenza:

$$\vdash \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$$

Di che legge si tratta? [Suggerimento: Si dimostra per assurdo usando la regola DN]