Tutoraggio Analisi II

dott. Sconcella

a.a. 2012/2013

Lezione del 30/1/2013

Esercizio 1

Data la funzione $f(x,y)=x^2-y^2$ e la curva vincolo di equazione $g(x,y)=x+2y^2-2=0$

a) rappresentare sul piano cartesiano la curva vincolo e le curve di livello di f di equazioni $f(x,y)=1$ e $f(x,y)=-1$.

b) Scrivere la lagrangiana e determinare gli eventuali punti critici attraverso le condizioni di Lagrange.

c) classificare gli eventuali punti critici trovati attraverso la matrice hessiana orlata.

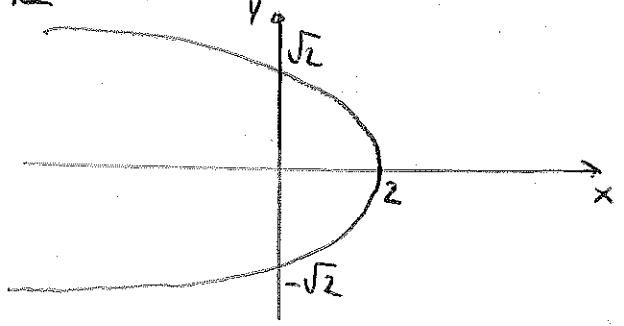
d) illustrare il significato geometrico delle condizioni di Lagrange in generale e nel caso specifico di uno dei punti critici trovati.

Svolgimento

Andando ad esplicitare il vincolo $x+2y^2-2=0$ rispetto alla variabile x si ottiene

$$x=-2y^2+2$$

che rappresenta l'equazione di una parabola con vertice in $V=(2,0)$ e rivolta verso sinistra. Ponendo $0=-2y^2+2$ si trova che le intersezioni con l'asse y si hanno per $y=-\sqrt{2}$ e $y=\sqrt{2}$.
Graficamente si ha



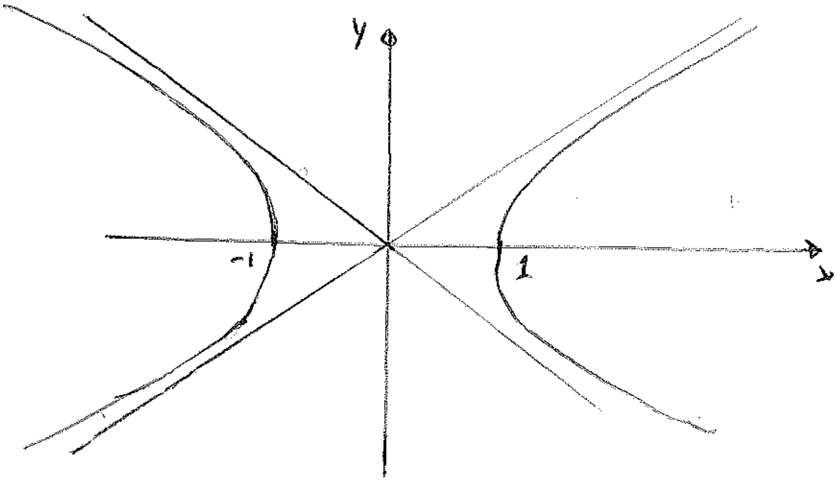
quindi

$$\text{Vincolo}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+2y^2-2=0\}$$

Determiniamo ora la curva di livello corrispondente al valore $k=1$
Quindi ponendolo

$$f(x,y)=1 \quad \Rightarrow \quad x^2-y^2=1$$

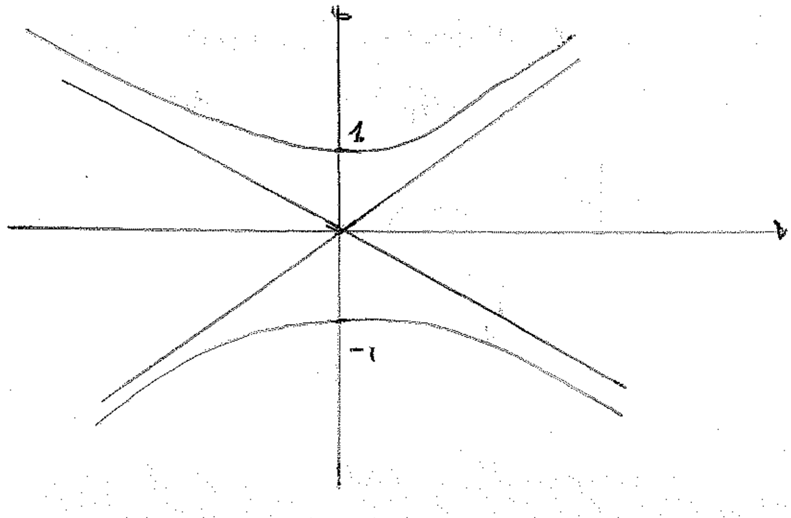
L'equazione trovata rappresenta l'equazione di un iperbole che interseca l'asse x in $x=1$ e $x=-1$.
Graficamente si ha



Studiamo ora la curva di livello corrispondente al valore $k=-1$
Quindi ponendolo

$$f(x,y)=-1 \quad \Rightarrow \quad x^2-y^2=-1$$

L'equazione trovata rappresenta l'equazione di un iperbole che interseca l'asse y in $=1$ e $y=-1$.
Graficamente si ha



b) L'espressione della funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x + 2y^2 - 2)$$

quindi calcolando $\nabla \mathcal{L}$ e ponendolo uguale a 0 si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -2y + 4\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = x + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ y(2\lambda - 1) = 0 \\ x + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -2x \\ y(-4x - 1) = 0 \\ x + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo i seguenti casi:

- se $y = 0$, allora $x = 2$
- se $y \neq 0$, allora $x = -\frac{1}{4}$ e $y = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}}$

Pertanto i punti stazionari sono $(2,0)$, $(-1/4, 3/2\sqrt{2})$, $(-1/4, -3/2\sqrt{2})$

c) Se $\mathcal{L} = f + \lambda g$ allora l'Hessiana orlata è

$$H(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_x g(x,y) & \partial_y g(x,y) \\ \partial_x g(x,y) & \partial^2_{xx}\mathcal{L}(x,y) & \partial^2_{xy}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_y g(x,y) & \partial^2_{xy}\mathcal{L}(x,y) & \partial^2_{yy}\mathcal{L}(y,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4y \\ 1 & 2 & 0 \\ 4y & 0 & -2+4\lambda \end{bmatrix}$$

per capire la natura dei punti critici bisogna calcolare il determinante di $H(x_0, y_0, \lambda_0)$. Quindi

$$\det(H(2,0,-4)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-1) = 10 > 0 \Rightarrow (2,0) \text{ è punto di massimo locale}$$

$$\det(H(-1/4, 3/2\sqrt{2}, 1/2)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6/\sqrt{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ 6/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{6}{\sqrt{2}}(-6\sqrt{2}) = -36 < 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \text{ punto di minimo locale}$$

$$\det(H(-1/4, -3/2\sqrt{2}, 1/2)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -6/\sqrt{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ -6/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{6}{\sqrt{2}}(6\sqrt{2}) = -36 < 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \text{ punto di minimo locale}$$

d) Il significato geometrico è: le curve di livello sono tangenti al vincolo. Consideriamo il punto $(2,0)$. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (2x, -2y) \Rightarrow \nabla f(2,0) = (4,0)$$

$$\nabla g(x,y) = (1, 4y) \Rightarrow \nabla g(2,0) = (1,0)$$

da cui si ricava che $\nabla f(2,0)$ e $\nabla g(2,0)$ sono vettori paralleli.

ESERCIZIO 2

Dato $f(x,y) = \sqrt{2xy - 1}$

a) determinare il dominio della funzione f e rappresentarlo sul piano cartesiano

b) calcolare le derivate parziali prime e seconde della funzione f

c) scrivere il polinomio di Taylor di primo grado e l'equazione del piano tangente al grafico di f relativamente al punto $(x_0, y_0) = (1,1)$.

d) scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado e l'equazione del paraboloide tangente al grafico di f relativamente al punto $(x_0, y_0) = (1,1)$.

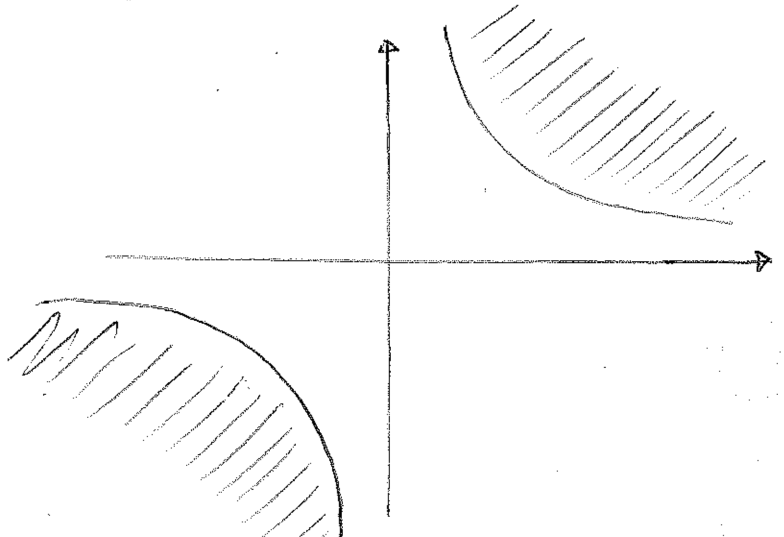
SVOLGIMENTO

a) Affinché la funzione f sia definita dobbiamo imporre che

$$2xy - 1 \geq 0$$

Da cui si ricava che $xy \geq \frac{1}{2}$. L'equazione $xy = \frac{1}{2}$ rappresenta l'equazione di un iperbole situata nel primo e terzo quadrante i cui asintoti sono dati dagli assi cartesiani

Graficamente si ha



quindi

$$\text{Dominio } f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid xy \geq \tfrac{1}{2}\}$$

b) Il gradiente di f è dato da

$$\nabla f = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{\sqrt{2xy-1}} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{\sqrt{2xy-1}} \end{cases}$$

le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y \frac{2y}{2\sqrt{2xy-1}} \cdot \frac{1}{2xy-1} = \frac{-y^2}{(2xy-1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \frac{2x}{2\sqrt{2xy-1}} \cdot \frac{1}{2xy-1} = \frac{-x^2}{(2xy-1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\sqrt{2xy-1} - y \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2xy-1}}}{2xy-1} = \frac{2xy-1-2xy}{(2xy-1)^{3/2}} = \frac{xy-1}{(2xy-1)^{3/2}}$$

c) L'espressione del polinomio di Taylor di primo grado è data da

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0)$$

$$= 1 + (1,1) \cdot (x-1, y-1) = 1 + x - 1 + y - 1 = x + y - 1$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0,y_0) = (1,1)$ è data da

$$\nabla h(x_0,y_0,z_0) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

dove $h(x,y,z) = \sqrt{2xy-1} - z$

Si ha che $z_0 = f(x_0,y_0) = 1$, quindi abbiamo

$$\nabla h(1,1,1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0$$

da cui si ricava

$$(1,1,-1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0$$

quindi

$$x-1+y-1-z+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x+y-z-1 = 0$$

d) L'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado è data da

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2}\left[Hf(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + x + y + \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix}\right]\cdot\begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + x + y + \frac{1}{2}\Big(\overbrace{-x+1-y+1}^{-x-y+2}, \overbrace{-x+1-y+1}^{-x-y+2}\Big)\cdot(x-1, y-1)$$

$$= 1 + x + y + \frac{1}{2}\left(-x^2 - xy + 2x + x + y - 2 - xy - y^2 + 2y + x + y - 2\right)$$

$$= 1 + x + y + \frac{1}{2}\left(-x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - xy + 3x + 3y - 1$$

L'equazione del paraboloide tangente nel punto $(1,1)$ si trova ponendo

$z = P(x,y)$

quindi si ho

$$z - P(x,y) = 0 \implies z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy - 3x - 3y + 1$$

ESERCIZIO 3

Enunciare il teorema di integrabilità nel piano e la formula di riduzione degli integrali doppi; definire un dominio piano normale.

Calcolare, se esiste, $\iint_T xy\,dx\,dy$ con T triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (1,1)$.

SVOLGIMENTO

(1) Una regione $D \subset \mathbb{R}^2$ è detta dominio normale rispetto all'asse x se i punti $(x,y) \in D$ soddisfano le seguenti relazioni: $a \leq x \leq b$, $f(x) \leq y \leq g(x)$.

(2) Analogamente, la regione $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è detta dominio normale rispetto all'asse y se i punti $(x,y) \in D$ soddisfano le seguenti relazioni: $c \leq y \leq d$, $h(y) \leq x \leq k(y)$

(3) Se valgono le relazioni di normale rispetto all'asse x e normale rispetto all'asse y allora la regione è detta dominio normale.

TEOREMA INTEGRABILITÀ: Ogni funzione f continua su un dominio piano normale D è ivi integrabile.

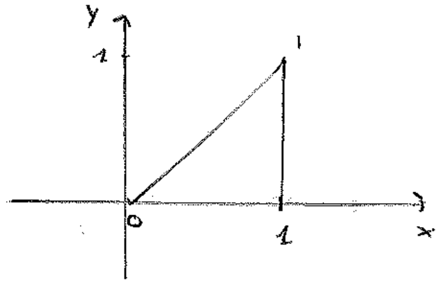
Le formule di riduzione sono:

se D è normale rispetto all'asse x $\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$

se D è normale rispetto all'asse y $\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{k(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$

se D è normale $\Rightarrow \int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{h(y)}^{k(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

Disegnamo il dominio



Siccome la funzione integranda è continua e il dominio T è compatto allora l'integrale esiste. Andiamo ad integrare per linee parallele all'asse y.

Abbiamo che x varia tra $x=0$ e $x=1$, mentre y varia tra $y=0$ e $y=x$.

Quindi

$$\int_0^1 \int_0^x xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

ESERCIZIO 4

Classificare e risolvere l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = \cos x$$

Definire i concetti di integrale generale ed integrale particolare.

SVOLGIMENTO

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

Risolviamo l'equazione omogenea associata: $y'' - 2y + y = 0$

Il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ che ha come soluzione

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$ che è soluzione doppia.

Quindi la soluzione dell'omogenea è $y_{omo}(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$

Usiamo il metodo dei coefficienti indeterminati. Poiché al termine $\cos x$ è associato i che non è radice del polinomio caratteristico, cerchiamo soluzioni particolari nella forma

$$\bar{y}(x) = (A \cos x + B \sin x)$$

andando a derivare otteniamo

$$\bar{y}'(x) = (-A \sin x + B \cos x)$$

$$\bar{y}''(x) = -(A \cos x + B \sin x)$$

quindi sostituendo si ha

$$\bar{y}''(x) - 2\bar{y}'(x) + \bar{y}(x) = \cos x$$

cioè

$$-2(-A \sin x + B \cos x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

perciò

$$\bar{y}(x) = -\frac{\sin x}{2}$$

Pertanto la soluzione è

$$y(x) = y_{omo}(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - \frac{\sin x}{2}$$

Mettiamoci nel caso delle EDO del primo ordine.
Sia pertanto $F(x,y,y')=0$ una EDO del 1° ordine. Una qualsiasi funzione $y=y(x)$ definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e derivabile su tale intervallo con derivata continua tale che soddisfi la seguente relazione

$$F(x, y(x), y'(x))=0 \quad \forall x\in I$$

è detta INTEGRALE GENERALE di $F(x,y,y')$.
Ogni integrale generale di $F(x,y,y')$ ottenuto in corrispondenza ad un fissato punto iniziale $p_0=(x_0,y_0)\in I$ è detto INTEGRALE PARTICOLARE.