Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2015/16
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra

13 settembre 2016

1. (a) Si dimostri che ogni campo finito ha caratteristica $p \neq 0$.

   (b) Si deduca che il numero di elementi in un campo finito è sempre una potenza di un numero primo.

   (c) Si enunci il Teorema di Classificazione dei Campi Finiti.

   (3+3+4 punti)

2. Sia $f = x^4 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$.

   (a) Si determinino il campo di riducibilità completa F di f su $\mathbb{Q}$ e il grado dell'estensione $[F : \mathbb{Q}]$. *(2 punti)*

   (b) Si determinino gli elementi di $H = \mathrm{Gal}(F/\,\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}))$. *(2 punti)*

   (c) Si verifichi che $H' = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(i)) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. *(4 punti)*

   (d) Si decida se H' è un sottogruppo normale di $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. *(2 punti)*

   (e) Si decida se $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ è un gruppo abeliano. *(2 punti)*

3. Si decida se $f \in K[x]$ è irriducibile su K e, in caso contrario, lo si scomponga in polinomi irriducibili su K

   (a) per $K = \mathbb{Q}$ e $f = x^5 + 1$ *(4 punti)*

   (b) per $K = \mathbb{Z}/3Z$ e $f = x^4 + x^2 + 1$ *(4 punti)*

Nome: .... Matricola: .... Punteggio totale: