Calcolo Numerico per Informatica – 27/06/2016

Tempo: 150 minuti

Completare, in STAMPATELLO la propria anagrafica:

MATRICOLA	COGNOME	NOME

L'esame ha otto esercizi. Gli esercizi hanno difficoltà differenti. Ogni esercizio ha associato un punteggio indicativo.
Le soluzioni degli esercizi vanno svolte su uno o più fogli a quadretti. Riportare su ogni foglio la propria anagrafica. Le soluzioni devono essere chiare, ordinate, giustificate. Eseguire le operazioni, quando necessario, usando almeno 6 o 7 cifre decimali.

Esercizio 1 (3,0 punti) Siano $x = 0.9$, $y = 0.5$, $z = 0.4$ numeri reali. Sia $\mathbb{F}(10, 1, -2, 2)$. Calcolare $S = x + y + z$, $S_1 = (x \oplus y) \oplus z$, $S_2 = x \oplus (y \oplus z)$ e commentare i risultati ottenuti.

Soluzione. La somma S è calcolata in $\mathbb{R}$ e dà

$$S = x + y + z = 0.9 + 0.5 + 0.4 = 1.8$$

Consideriamo la somma S_1. Ricordiamo che $\mathbb{F}(10, 1, -2, 2)$ contiene, oltre allo 0, i numeri che hanno una sola cifra dopo il punto decimale ossia sono del tipo $\pm\, 0.c_1 \cdot 10^{\beta}$ con $c_1 \in \{1, 2, \dots, 9\}$ e $\beta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Ne risulta

$$x \oplus y \quad = \quad \mathrm{fl}(x + y) = \mathrm{fl}(0.9 + 0.5) = \mathrm{fl}(1.4) = \mathrm{fl}(0.14 \cdot 10^1) = 0.1 \cdot 10^1 = 1$$

dove abbiamo usato la tecnica dell'arrotondamento (per cui 1.4 viene arrotondato a 1 dato che dobbiamo avere una sola cifra significativa per rappresentarlo in $\mathbb{F}(10, 1, -2, 2)$). Analogamente, è

$$(x \oplus y) \oplus z \quad = \quad \mathrm{fl}(1 + 0.4) = \mathrm{fl}(1.4) = 1$$

Pertanto, risulta $S_1 = 1$. Calcoliamo S_2 procedendo allo stesso modo. Risulta

$$\begin{aligned} y \oplus z &= \mathrm{fl}(y + z) = \mathrm{fl}(0.5 + 0.4) = \mathrm{fl}(0.9) = 0.9 \\ x \oplus (y \oplus z) &= \mathrm{fl}(0.9 + 0.9) = \mathrm{fl}(1.8) = 2 \end{aligned}$$

dato che $0.9 \in \mathbb{F}(10, 1, -2, 2)$. La somma S_2 è decisamente più precisa di S_1. In effetti, gli errori relativi sono

$$e_1 = \left| \frac{S - S_1}{S} \right| = \left| \frac{1.8 - 1}{1.8} \right| \approx 0.4 \qquad , \qquad e_2 = \left| \frac{S - S_2}{S} \right| = \left| \frac{1.8 - 2}{1.8} \right| \approx 0.1$$

Questo fatto, pur non essendo di validità assoluta, evidenzia come nella somma di macchina di più numeri può essere conveniente cominciare sommando i più piccoli.

Esercizio 2 (5,0 punti) Il metodo di Newton genera le seguenti iterate:

k	0	1	2	3	4	5
x_k	2.000000000	0.613705639	0.913341207	0.996131703	0.999992508	1.000000000

Indicare, ragionevolmente, a quale radice ξ converge il metodo. Determinandone l'ordine del metodo e la molteplicità della radice ξ. Calcolare una stima della costante asintotica dell'errore ed una stima dei valori assoluti degli errori $e_4 = \xi - x_4$ ed $e_5 = \xi - x_5$.

Soluzione. Dall'esame visivo delle iterate è ragionevole assumere $\xi = 1$. Per stabilire l'ordine del metodo, conviene vedere come si comportano gli errori $e_k = \xi - x_k$. Prendendo i valori assoluti degli errori, risulta

$$\begin{aligned}
|e_0| &= |2.000000000 - 1| = 1 \cdot 10^0 \\
|e_1| &= |0.613705639 - 1| \approx 4 \cdot 10^{-1} \\
|e_2| &= |0.913341207 - 1| \approx 9 \cdot 10^{-2} \\
|e_3| &= |0.996131703 - 1| \approx 4 \cdot 10^{-3} \\
|e_4| &= |0.999992508 - 1| \approx 7 \cdot 10^{-6}
\end{aligned}$$

Tenuto conto che il legame che intercorre tra gli errori deve essere guardato per k grande (in teoria, per $k \to +\infty$) e osservato che $|e_4| \approx |e_3|^{\mathbf{2}}$, l'ordine del metodo è $p = \mathbf{2}$. Questo significa che la radice ξ è semplice (infatti, l'ordine del metodo di Newton è $p = 1$ se la radice è multipla e $p \geq 2$ se la radice è semplice. D'altronde, $p > 2$ è scartato perché $|e_4| \approx |e_3|^2$ per cui resta solo $p = 2$). La costante asintotica dell'errore C può essere stimata dal rapporto degli errori (con il corretto valore dell'ordine del metodo!)

$$C \approx \frac{|e_4|}{|e_3|^{\mathbf{2}}} = 0.5$$

Dato che l'ordine del metodo è $p = 2$, gli scarti sono un'ottima stima dell'errore. Precisamente, è

$$|e_4| \approx |x_5 - x_4| = 7.5 \cdot 10^{-6}$$

mentre per $|e_5|$ abbiamo

$$|e_5| \approx C \cdot |e_4|^2 = 0.5 \cdot \left(7.5 \cdot 10^{-6} \right)^2 = 2.8 \cdot 10^{-11}$$

Esercizio 3 (**5,0 punti**) Illustrare geometricamente il metodo della tangente fissa facendo riferimento alla funzione

$$f(x) = x^2 - 1$$

assumendo $x_0 = 2$. Stabilire se il metodo converge partendo da $x_0 = 2$. In caso affermativo, calcolare le prime tre iterate x_1, x_2, x_3, la costante asintotica dell'errore ed una stima del numero di iterazioni necessarie per avere $|e_k| < 10^{-6} \cdot |e_0|$.

Soluzione. Per la illustrazione del metodo della tangente fissa si rimanda alla lezione 10, pagina 9 che riporta proprio il caso in esame. Dal grafico di f è immediato vedere che il metodo converge alla radice $\xi = 1$. Dato che è $f'(x) = 2x$ risulta $f'(x_0) = 4$. Quindi, le iterate sono

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{5}{4} \\
x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_0)} = \frac{71}{64} \\
x_3 &= x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_0)} = \frac{651}{619}
\end{aligned}$$

Il metodo della tangente fissa è di ordine $p = 1$ con costante asintotica dell'errore data da

$$C = \left| 1 - \frac{f'(\xi)}{f'(x_0)} \right| = \left| 1 - \frac{2}{4} \right| = 0.5$$

Dato che il metodo ha ordine $p = 1$ è possibile fornire una stima del numero di iterazioni necessarie per avere $|e_k| < 10^{-6} \cdot |e_0|$. Poiché è $|e_k| \approx C^k \cdot |e_0|$, abbiamo

$$\frac{|e_k|}{|e_0|} < 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad C^k < 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad 0.5^k < 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad k > \frac{-6}{\log_{10}(0.5)} = 19.9$$

Servono, quindi, circa 20 iterazioni per avere $|e_k| < 10^{-6} \cdot |e_0|$.

Esercizio 4 (**5,0 punti**) Si considerino i nodi distinti x_0, x_1 ed x_2 con $x_0 < x_1 < x_2$. Sapendo che il polinomio di Lagrange associato al nodo x_0 è

$$L_0(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - x)$$

calcolare gli altri due nodi x_1 e x_2 e scrivere l'espressione di Lagrange del polinomio di interpolazione per i punti (x_k, y_k), $k = 0, 1, 2$ essendo $y_k = f(x_k)$ con $f(x) = x^4 + 2x$.

Soluzione. Il polinomio di Lagrange $L_0(x)$ associato ai nodi x_0, x_1, x_2 è

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)}$$

da cui appare chiaro che x_1 ed x_2 sono le radici di $L_0(x)$ (che sono 0 e 1). Pertanto, dato che $x_1 < x_2$, abbiamo $x_1 = 0$ ed $x_2 = 1$. Per scrivere l'espressione del polinomio di Lagrange dobbiamo conoscere anche x_0. Ora, è $L_0(x_0) = 1$ per cui x_0 è radice dell'equazione $L_0(x) = 1$. Le radici di questa equazione sono -1 e 2. Dato che $x_0 < x_1 = 0$, è $x_0 = -1$. Essendo

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(-1) = (-1)^4 + 2 \cdot (-1) = -1 \\
f(x_1) &= f(0) = (0)^4 + 2 \cdot 0 = 0 \\
f(x_0) &= f(1) = 1^4 + 2 \cdot 1 = 3
\end{aligned}$$

l'espressione di Lagrange del polinomio di interpolazione è

$$\begin{aligned}
P(x) &= f(x_0) \cdot \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} + f(x_1) \cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} + f(x_2) \cdot \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \\
&= -1 \cdot \frac{(x - 0) \cdot (x - 1)}{(-1 - 0) \cdot (-1 - 1)} + 0 \cdot \frac{[x - (-1)] \cdot (x - 1)}{[0 - (-1)] \cdot (0 - 1)} + 3 \cdot \frac{[x - (-1)] \cdot (x - 0)}{[1 - (-1)] \cdot (1 - 0)}
\end{aligned}$$

Esercizio 5 (**5,0 punti**) Calcolare la retta di regressione ai minimi quadrati associata ai punti $(-2,1)$, $(-1,0)$, $(0,2)$, $(1,1)$. Verificare che la retta di regressione passa per il baricentro dei punti dati.

Soluzione. Ci sono quattro punti. Quindi, volendo usare la numerazione dei nodi x_0, x_1, x_2, x_3 vista a lezione, è $m = 3$. La retta di regressione $y = a_0 + a_1 x$ ha coefficienti a_0 ed a_1 che soddisfano il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} m+1 & \sum x_k \\ \sum x_k & \sum x_k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_k \\ \sum x_k \cdot y_k \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dividendo per 2 la prima equazione e sommandola alla seconda troviamo $5a_1 = 1$ che dà $a_1 = 1/5$; poi è $a_0 = 11/10$. Il baricentro G dei punti dati è

$$G = (x_G, y_G) = \left(\frac{\sum x_k}{m+1} \, , \, \frac{\sum y_k}{m+1} \right) = \left(\frac{-2}{4} \, , \, \frac{4}{4} \right)$$

per cui risulta

$$a_0 + a_1 x_G = \frac{11}{10} + \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 1 = y_G$$

Quindi la retta di regressione passa per il baricentro G.

Esercizio 6 (**5,0 punti**) Applicare il metodo dei trapezi composto al calcolo dell'integrale

$$I = \int_0^2 x^2\,dx$$

usando $m = 2$ e $m = 4$ intervalli. Usare questi due valori per ottenere una stima migliore dell'integrale. Commentare i risultati ottenuti.

Soluzione. Abbiamo $f(x) = x^2$. L'intervallo di integrazione è $[a, b] = [0, 2]$. Con $m = 2$ intervalli, i nodi sono $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e la distanza tra due nodi consecutivi è $h = x_1 - x_0 = 1$. Ne risulta

$$I_2 = \frac{h}{2}\,[\, f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)\,] = \frac{1}{2}\,[\, 0^2 + 2\cdot 1^2 + 2^2\,] = 3$$

Con $m = 4$ intervalli, i nodi sono $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = 2$ e la distanza tra due nodi consecutivi è $h = x_1 - x_0 = \frac{1}{2}$. Ne risulta

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{h}{2}\{\, f(x_0) + 2\,[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] + f(x_4)\,\} \\ &= \frac{1/2}{2}\left\{ 0^2 + 2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + 2^2 \right\} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

Una stima migliore si ottiene da

$$\hat{I} = \frac{4I_4 - I_2}{3} = \frac{4\cdot\frac{11}{4} - 3}{3} = \frac{8}{3}$$

Questo è il valore esatto dell'integrale. Dovevamo aspettarcelo perché $f''(x) = 2$, costante in $[0, 2]$.

Esercizio 7 (5,0 punti) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = E\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$ è convergente per ogni scelta del punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ essendo

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \alpha \\ \alpha & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Posto $\alpha = 1/3$, determinare $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a cui converge il metodo iterativo e stimare il numero di iterazioni necessarie per avere un errore, in norma, inferiore a 1/10000 dell'errore iniziale (ossia $\|\mathbf{e}^{(k)}\|/\|\mathbf{e}^{(0)}\| < 10^{-4}$).

Soluzione. Il metodo converge per ogni scelta del punto iniziale se e solo se $\rho(E) < 1$. Gli autovalori di E sono le radici del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = |E - \lambda I_2| = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \alpha \\ \alpha & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix} \right| = \left(\frac{1}{3} - \lambda \right)^2 - \alpha^2 = \left(\frac{1}{3} - \lambda - \alpha \right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \lambda + \alpha \right)$$

Quindi è $P(\lambda) = 0$ se e solo se $\lambda = \frac{1}{3} - \alpha$ o $\lambda = \frac{1}{3} + \alpha$. Ne segue

$$\rho(E) = \max \left(\left| \frac{1}{3} - \alpha \right| \ , \ \left| \frac{1}{3} + \alpha \right| \right)$$

Osserviamo che i due autovalori sono simmetrici rispetto ad $\frac{1}{3}$ ed ognuno dista $|\alpha|$ da $\frac{1}{3}$. Quindi, c'è convergenza per $|\alpha| < \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$. Sia ora $\alpha = \frac{1}{3}$. Il metodo converge al punto fisso $\mathbf{x} = (x_1 \ , \ x_2)^T$ dell'iterazione $\mathbf{x}^{(k+1)} = E\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$ che è anche la soluzione di

$$\mathbf{x} = E\mathbf{x} + \mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ossia, scritto nella forma classica,

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 & -\frac{1}{3}x_2 & = & 0 \\ -\frac{1}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_2 & = & 1 \end{cases}$$

che risolto porge $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Infine, dato che per $\alpha = \frac{1}{3}$ è $\rho(E) = \frac{2}{3}$, la stima del numero di iterazioni è

$$\frac{\|\mathbf{e}^{(k)}\|}{\|\mathbf{e}^{(0)}\|} < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad [\rho(E)]^k < 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad k > \frac{-4}{\log_{10}(\ \rho(E)\ )} = 22.7$$

Dunque, servono circa 23 iterazioni per ridurre l'errore iniziale di 10000 volte.

Esercizio 8 (**3,0 punti**) Scrivere una function Matlab che, usando dei cicli, calcola il valore massimo del vettore **x**. La funzione ha in ingresso **x** ed in uscita il valore massimo *xmax*.

Soluzione. Una possibilità è la seguente:

```
function xmax = maxvettore(x)

xmax = x(1);
for k=2:length(x)
    if x(k)>xmax
        xmax = x(k);
    end
end
```