

EX3 file B Analisi Matematica I

Calcolare, se $\exists$,
$$\int_{-\infty}^1 (x^2-1)e^x dx$$

giustificando tutti i passaggi.

Definire l'integrale di una funzione f sull'intervallo non limitato $(a, +\infty)$

Ris

Def sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists \int_a^x f(t) dt \quad \forall x > a$ (in senso proprio o improprio)

Si dice che f ha integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$

se $\exists$ finito il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$.

In tal caso si pone $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$.

Sia $f(x) = (x^2-1)e^x$ definita e continua in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \int_x^1 f(t) dt \quad \forall x < 1$

Considero $\int (x^2-1)e^x dx = (x^2-1)e^x - \int 2xe^x dx$

$$\begin{array}{ll} f' = e^x & g = x^2-1 \\ f = e^x & g' = 2x \end{array}$$

Considero $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x = xe^x - e^x + c$

$$\begin{array}{ll} f' = e^x & g = x \\ f = e^x & g' = 1 \end{array}$$

Allora $\int (x^2-1)e^x dx = (x^2-1)e^x - 2(xe^x - e^x) + c = (x^2-1)e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

$$\int_x^1 f(t) dt = (t^2-1)e^t - 2te^t + 2e^t \Big|_x^1 = \underbrace{(1-1)}_0 e^1 - 2e^1 + 2e +$$

$$- [(x^2-1)e^x - 2xe^x + 2e^x] =$$

$$= -2e + 2e - (x^2-1)e^x + 2xe^x - 2e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$