I numeri naturali

Da un punto di vista ingenuo si può pensare ai naturali semplicemente come ad una sequenza infinita $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Definition 1 *I numeri naturali sono una tripla* $< \mathbb{N}, 0, \sigma >$ *t.c.*

assioma 1: $\mathbb{N}$ *è un insieme e* 0 *è un elemento privilegiato di* $\mathbb{N}$ *detto zero;*

assioma 2: $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *è una operazione unaria iniettiva su* A*;*

assioma 3: $0 \notin Im(\sigma)$*;*

assioma 4: *se* $P \subseteq \mathbb{N}$ *e valgono le seguenti proprietà:*
i) $0 \in P$*;*
ii) $\forall n \in \mathbb{N}.(n \in P \Rightarrow \sigma(n) \in P)$
allora $P = \mathbb{N}$.

Gli assiomi dei numeri naturali sono dovuti a G.Peano. In particolare l'assioma 4 è detto *assioma di induzione*.

Tramite l'assioma di induzione possiamo provare proprietà sui numeri naturali.

Una proprietà P sui naturali corrisponde ad un sottoinsieme di $P \subseteq \mathbb{N}$. La notazione $P(x)$ altro non è che un'abbreviazione per $x \in P$.

L'osservazione appena fatta permette di riformulare l'assioma di induzione come principio per provare proprietà sui naturali.

principio di induzione:

Sia P una proprietà su $\mathbb{N}$:
se $P(0)$ e $\forall n \in \mathbb{N}.(P(n) \Rightarrow P(\sigma(n))$ allora $\forall m \in \mathbb{N}.P(m)$.

Example 2 *Dimostriamo per induzione che la proprietà* $P(n) \equiv \sum_{i=0}^{i=n} 2i+1 = (n+1)^2$ *è vera per ogni* n.
caso base*: se* $n = 0$ *la proprietà è vera in quanto* $\sum_{i=0}^{i=0} 2i+1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 = (0+1)^2$*;*
passo induttivo*: supponiamo che* $P(k)$ *sia vera, ovvero* $\sum_{i=0}^{i=k} 2i+1 = (k+1)^2$.
$\sum_{i=0}^{i=k+1} 2i+1 = \sum_{i=0}^{i=k} 2i+1+(2(k+1)+1) = (k+1)^2+2(k+1)+1 = ((k+1)+1)^2$,
e quindi $P(k+1)$ *è vera.*

Definizioni per ricorsione (primitiva)

Una prassi usuale in informatica è quella di dare definizioni per ricorsione. Il caso più semplice è quello della definizione per induzione di funzioni.

Theorem 3 *Sia* $h : \mathbb{N} \times A \to A$ *e* $c \in A$*. Esiste (ed è unica) una funzione* $f : \mathbb{N} \to A$ *t.c.:*
1. $f(0) = c$
2. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma(n)) = h(n, f(n))$.

Dimostrazione (facoltativa)

Esistenza di f : sia Ω la classe di tutti gli insiemi $Z \subseteq \mathbb{N} \times A$ t.c. $(0, c) \in Z$ e $(n, x) \in Z \Rightarrow (\sigma(n), h(n, x)) \in Z$; chiamiamo *soddisfacenti* tali insiemi.

E' immediato osservare che Ω non è vuoto.

Sia f l'intersezione di tutti gli elementi di Ω. L'insieme f è ovviamente soddisfacente ed è contenuto in ogni insieme soddisfacente.

Dimostriamo per induzione che : per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste esattamente un $a \in A$ t.c. $(n, a) \in f$ (ovvero f è una funzione).

caso base: sappiamo che $(0, c) \in f$. Supponiamo che $(0, d) \in f$ con $d \neq c$. Allora $f - \{(0, d)\}$ sarebbe sempre sodisfacente e sarebbe contenuto propriamente in f, impossibile.
passo induttivo: supponiamo che la proprietà valga per un generico naturale i, ovvero che esiste unico w t.c. $(i, w) \in f$. Per costruzione di f deve valere che: $(\sigma(i), h(i, w)) \in f$. Supponiamo ora che esista un elemento $e \neq h(i, w)$ t.c. $(\sigma(i), e) \in f$. L'insieme $f - \{(\sigma(i), e)\}$ è soddisfacente e sarebbe strettamente contenuto in f, impossibile.

Notiamo infine che la funzione f essendo soddisfacente soddisfa banalmente i punti (1.) e (2.) del teorema.

Unicità di f**:** supponiamo che esistano due funzioni f_1 e f_2 verificanti i punti (1.) e (2.) del teorema. Dimostriamo per induzione che $f_1 = f_2$.

caso base: $f_1(0) = f_2(0)$ per definizione. Supponiamo che per un generico naturale i, $f_1(i) = f_2(i)$.
passo induttivo: Applicando il punto due abbiamo che $f_1(\sigma(i)) = h(i, f_1(i)) = h(i, f_2(i)) = f_2(\sigma(i))$.

QED

Corollary 4 *Sia* $g : A \to A$ *e* $c \in A$. *Esiste (ed è unica) una funzione* $f : \mathbb{N} \to A$ *t.c.:*
1. $f(0) = c$
2. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma(n)) = h(f(n))$.

Dimostrazione
Sia $h : \mathbb{N} \times A \to A$ definita da $h(x, y) = g(y)$, si osservi che esisite unica $f : \mathbb{N} \to A$ t.c.:
1. $f(0) = c$
2. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(\sigma(n)) = h(n, f(n)) = g(f(n))$. **QED**

Example 5 *Sia* $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *t.c.* $h(x, y) = \sigma(x) \cdot y$. *Per il teorema appena dimostrato esite un'unica funzione* f *t.c.:*
$f(0) = 1$
$f(\sigma(n))) = h(n, f(n))$.
Che funzione è f *?*

La somma di naturali

La somma di due numeri naturali è ricorsivamente definita da:

$m + 0 = m$
$m + \sigma(n) = \sigma(m + n).$

La definizione rientra perfettamente nello schema delle definizioni per ricorsione (primitiva): per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo la seguente funzione:

$s_m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$s_m(0) = m$
$s_m(\sigma(n)) = \sigma(s_m(n));$

Definiamo $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nel modo seguente: $x + y = s_x(y)$.

Esercizio: dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze ($m, n \in \mathbb{N}$):

1. $0 + n = n$;
2. $\sigma(m + n) = \sigma(m) + n$;
3. $m + n = n + m$;

Il prodotto di naturali

Il prodotto di due numeri naturali è ricorsivamente definita da:

$m \times 0 = 0$
$m \times \sigma(n) = m + (m \times n).$

Esercizio: dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze ($m, n \in \mathbb{N}$):

1. $0 \times n = 0$;
2. $m \times n = n \times m$;

Altre definizioni ricorsive

Sommatorie:

1. $\sum_{i=0}^{0} E_i = E_0$;
2. $\sum_{i=0}^{\sigma(n)} E_i = (\sum_{i=0}^{n} E_i) + E_{\sigma(n)}$;

Produttorie:

1. $\prod_{i=0}^{0} E_i = E_0$;
2. $\prod_{i=0}^{\sigma(n)} E_i = (\prod_{i=0}^{n} E_i) \times E_{\sigma(n)}$;

Unioni finite:

1. $\bigcup_{i=0}^{0} E_i = E_0$;
2. $\bigcup_{i=0}^{\sigma(n)} E_i = (\bigcup_{i=0}^{n} E_i) \cup E_{\sigma(n)}$;