geodetiche : 1ª definizione

Def. geodetiche ≡ curve autoparallele, ovvero tali che il loro vettore velocità sia parallelo su di esse

$$\gamma : \; x = x(t)$$

$$\boxed{\ddot{x}^r + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma^r_{ij} = 0} \qquad r = 1, \dots, n$$

equazione delle geodetiche

Le geodetiche sono curve parametrizzate (l'equazione delle geodetiche non è invariante per cambiamento di parametro)

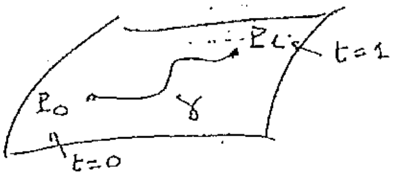
geodetiche : 2ª definizione

L'equazione delle geodetiche può dedursi a partire da due principi variazionali

$$L_1 = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$: energia cinetica di una particella di massa $m = 1$ che si muove liberamente su Σ

lagrangiana $\quad \dot{q}^i$

(in generale $L = T - V$, T en. cinetica, V en. potenziale)



$$L_1 = L_1(q^i, \dot{q}^i) \qquad (q^i = x^i)$$

$$\boxed{S(\gamma) := \int_0^1 \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \, dt}$$

azione

Fatto ☆: Le equazioni delle geodetiche sono le equazioni di Eulero-Lagrange ottenute da S tramite il principio di azione stazionaria [vedi geometria lez XI]

[Ricordiamo $\delta S = 0$, $S = \int_0^1 \mathcal{L}(q, \dot q)\, dt$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q^j}} \quad \text{Eulero-Lagrange}$$

$$\begin{array}{c} \| \\ f_i \end{array} = \dot p_i \qquad " p_i = g_{ij}\dot x^j \qquad \text{Eq. di Newton}$$

$$\Big(\text{se } \mathcal{L} = \underset{T(\dot q)}{\underset{\|}{T}} - V \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}\Big) \Big]$$

Sia ora $L_2 = \sqrt{2}\, L_1^{\frac{1}{2}}$ S = lunghezza (è indip dal parametro)

si trova

$$\frac{d}{dt}\frac{g_{kj}\dot x^j}{\sqrt{g_{ij}\dot x^i \dot x^j}} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot x^i \dot x^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot x^i \dot x^j}}$$

Se $t \propto s$ (ascissa curvilinea), ovvero $\sqrt{g_{ij}\dot x^i \dot x^j} = \text{cost}$

si ha
$$\boxed{\frac{d}{dt}\underbrace{g_{kj}\dot x^j}_{p_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot x^i \dot x^j}$$

cioè la stessa eq. di prima, come si verifica con qualche calcolo, nonché l'eq. di autoparallelismo (eq. geodetica)

   V. anche cap XI

☆☆ eq. delle geodetiche ≡ Eulero-Lagrange dimostrazione

$i,j = 1,2..n$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{2} g_{ij} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \dot{x}^k} \dot{x}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{x}^k}$$

$$= \frac{1}{2} g_{ij} \delta_{ik} \dot{x}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \delta_{jk} \dot{x}^i$$

$$= \frac{1}{2} g_{kj} \dot{x}^j + \frac{1}{2} g_{ik} \dot{x}^i$$

$$= g_{kj} \dot{x}^j$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^k}\right) = \frac{d}{dt}\left(g_{kj} \dot{x}^j\right) = \frac{d}{dt}(g_{kj}) \dot{x}^j + g_{kj} \ddot{x}^j$$

$$= g_{kj} \ddot{x}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

$$g_{kj} \ddot{x}^j + \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

molt. per g^{km} $\qquad g^{km} g_{jk} = g^{mk} g_{kj} = \delta^m_j$

$$\ddot{x}^m + g^{km}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

ora $\quad g^{km}\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j =$

cruciale!

$$= \frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}^j g^{km}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{x}^m + \underbrace{\frac{1}{2} g^{km}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)}_{\Gamma^m_{ij}}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

$$\boxed{\ddot{x}^m + \Gamma^m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0} \qquad m = 1\ldots n$$

Q.E.D.

Se $L = \sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} = \frac{\partial L}{\partial u^k}$$

diventa

$$\frac{d}{dt}\frac{g_{kj}\dot{u}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\dot{u}^i\dot{u}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}}$$

Se $t = \alpha s$ l. d'arco $\sqrt{g_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j} \equiv \text{cost}$

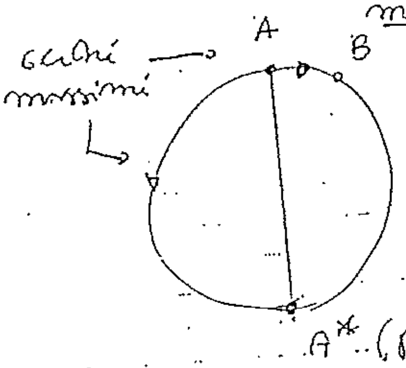
$\Rightarrow$ l'eq. diventa

$$\frac{d}{dt}\left(g_{kj}\dot{u}^j\right) = \frac{1}{2}\frac{g_{ij}}{\partial u^k}\dot{u}^i\dot{u}^j$$

⇒ $\boxed{\text{"Le geodetiche, misurate con un parametro naturale sono cammini critici del funzionale lunghezza"}}$

[☆ Attenzione! una geodetica non realizza necessariamente un cammino di lunghezza minima

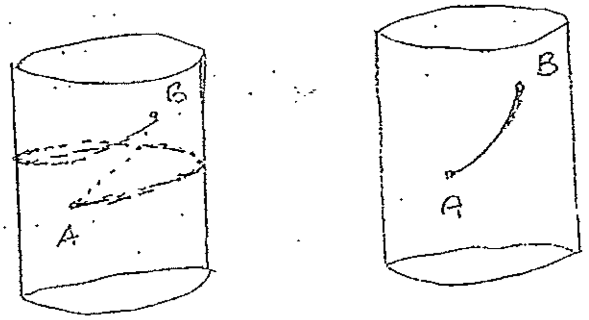
minimo



$\widehat{AB}$ minimo

$\widehat{AA^*B}$ non è minimo.

Altro esempio

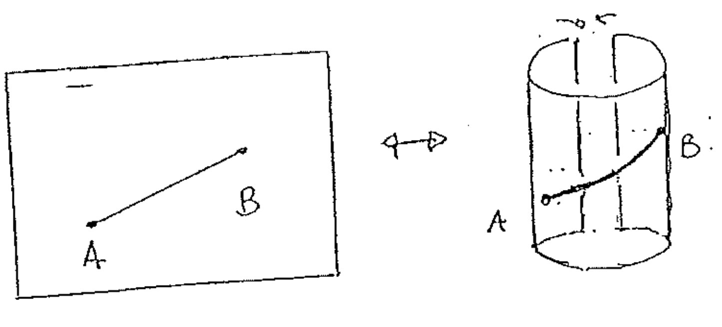


minimo

cilindro: geodetiche = eliche ...]
(vedi figura ...)

[... Si confronti ciò col principio di Maupertuis ..

$S = \int \sqrt{E - V(x)}\, ds \ldots$

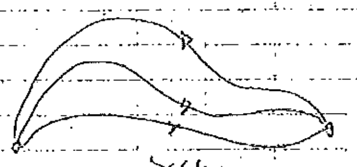


L'equazione delle geodetiche rivisitata

$$I = \langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle = \int_0^1 (\dot\gamma, \dot\gamma)\, dt$$

metrica riemanniana

si consid. $\alpha \mapsto \gamma(\alpha, t)$, $\gamma(0,t) = \gamma(t)$



$\gamma(t)$

$\gamma(\alpha; 0) = \gamma(0)$

$\gamma(\alpha, 1) = \gamma(1)$

Se $\gamma = \gamma(t)$ è critico per I

deve essere:

$$\boxed{\left(\frac{\partial \dot\gamma}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}, \dot\gamma \right) = 0} \quad \forall \text{ variazione}$$

Ciò eq. ad esprimere, estendendo $\dot\gamma$, e cons. ξ t.c. $[\underbrace{\dot\gamma}_{\partial/\partial t}, \underbrace{\xi}_{\partial/\partial\alpha}] = 0$ } attenzione!

ξ

posso lavorare con un riferimento mobile

(metricità) conn. di Levi Civita

$$\boxed{(\nabla_\xi \dot\gamma, \dot\gamma) = 0} \quad \forall \xi$$

ma $\nabla_\xi \dot\gamma = \nabla_{\dot\gamma} \xi$ (assenza di torsione!)

$\Rightarrow$ su γ $(\nabla_{\dot\gamma}\xi, \dot\gamma) = 0 \quad \sqrt{} \Rightarrow (\xi, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma) = 0$ poiché $(\xi, \dot\gamma) = 0$

$\Downarrow$ $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \parallel \dot\gamma$

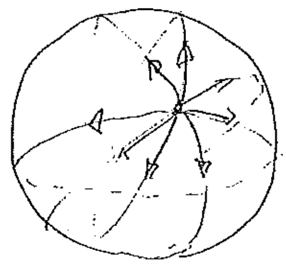
$$\Rightarrow \boxed{\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0}$$

ma $\dot\gamma(\dot\gamma, \dot\gamma) = \frac{\partial}{\partial s} \|\gamma'\| = 0$

su $\gamma = \gamma(t)$ sia $t = s$

Applicazione esponenziale (Riemanniana)
(o mappa esponenziale)

[precursore: Al-Biruni XI sec d.C.]
cerchi massimi



(M, g) var. Riemanniana

sp. tangente in p

$$\mathrm{Exp}_p \quad T_pM \longrightarrow M$$
$$\cup$$
$$X = X_p \longmapsto \gamma^{\underline{u}}(\|X\|)$$

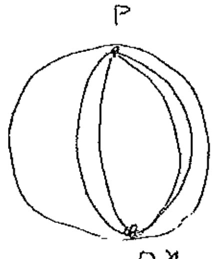
vettore tangente

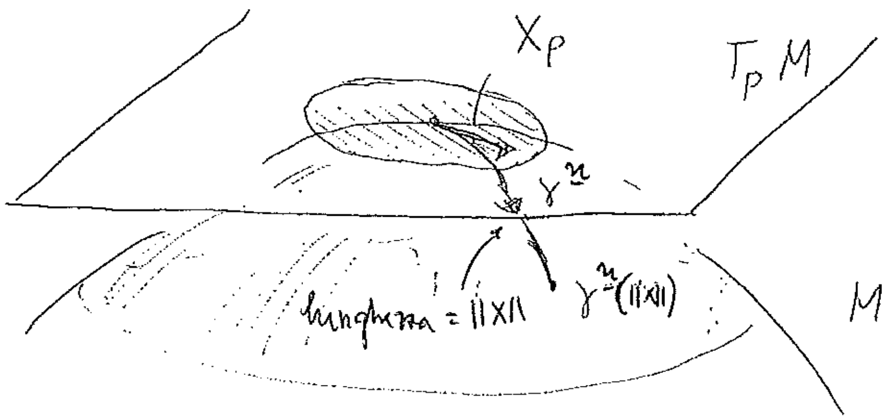
$\gamma = \gamma^{\underline{u}}(s)$, geodetica uscente da p con velocità unitaria (in $\| \ \|$ — se si usa la lunghezza d'arco) lungo X

$X = \|X\| \underline{u}$

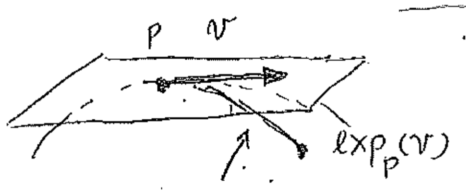
$\|\underline{u}\| = 1$

[loc. è un diffeomorfismo, non lo è globalmente, in generale, v. es. successivo

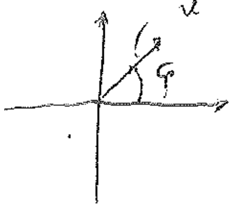




La mappa esponenziale su S^2



geodetica uscente da p,
direzione $\underline{v}$,
lunghezza $\equiv \|\underline{v}\|$
$=$
$\sqrt{g_p(\underline{v},\underline{v})}$

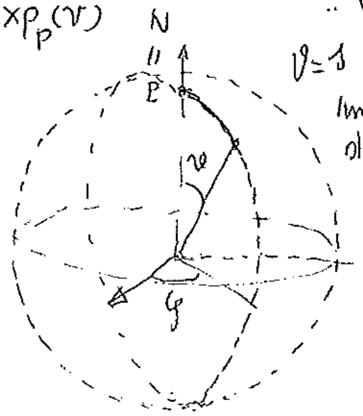


$$\mathbb{R}^2 \supset U \xrightarrow{\exp_p} S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

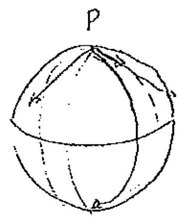
$\|v\| = 1$ longitudine

lunghezza d'arco



Calcoliamo

$d \exp_p$



P e P^*: coniugati

$$(d \exp)_p : \quad T_p\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{\exp_p} S^2 \subset T_{\exp_p}\mathbb{R}^3$$

$$(d \exp)_p : \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & +\sin\vartheta\cos\varphi \\ -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

⚠ se
$\vartheta = 0$, φ indet.!!

$\vartheta \in (0, 2\pi)$ e

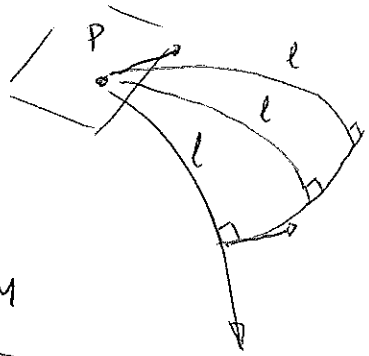
Se $\vartheta \neq 0$, $\vartheta \neq \pi$ rango $= 2$

Se $\vartheta = \pi$ si ha caduta di rango

$\underline{v} = \begin{pmatrix} \pi \\ \varphi \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} d\exp_p$

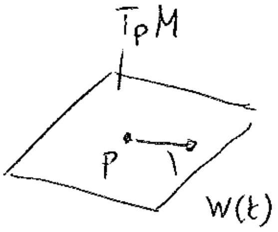
Il lemma di Gauss

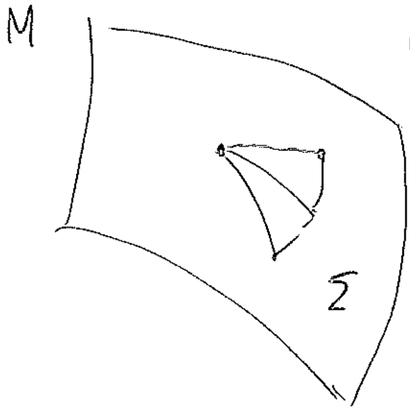
Consideriamo le superficie parametriche immerse Σ:



$$\gamma(s,t) = \exp_p s\,\overline{w}(t)$$

con $\overline{w} = \overline{w}(t) \qquad \|\overline{w}(t)\| \equiv 1$





$t \mapsto \gamma(l,t)$

$$\boxed{\text{arco di cerchio geodetico su } \Sigma \text{ di centro } p \text{ e raggio } l}$$

☆ lemma di Gauss: i cerchi geodetici sono $\perp$ alle geodetiche uscenti da p

Analiticamente:
$$\boxed{\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle = 0}$$

Dim. Calcoliamo $\dfrac{d}{ds}\left\langle \dfrac{\partial\gamma}{\partial s}, \dfrac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle$.

Si ha, successivamente:

$$\frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial\gamma}{\partial s}}_{=\,0}, \frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle$$

proprietà di simmetria della connessione di L-C

$$= \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\nabla}{ds}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial\gamma}{\partial s} \right\rangle =$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right\rangle}_{= L} = 0$$

pertanto $\quad \frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle = 0 \quad \Rightarrow$

$\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle$ non dipende da s.

Ma, dato che $\gamma(0,t) \equiv p \quad \forall t$,

è $\quad \frac{\partial\gamma}{\partial t}(0,t) = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left\langle \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle = 0}$

$\square$

Dettagli (applicazione della proprietà di simmetria) [si sottintende al solito la convenzione di Einstein]

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\nabla}{\partial s}\left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial s\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\nabla}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 x^i}{\partial s\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial t}\frac{\partial x^j}{\partial s}\underbrace{\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}_{= \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)}$$

$$\frac{\nabla}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \nabla_{\left(\frac{\partial x^j}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^j}{\partial s}\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$