TUTORAGGIO ANALISI II

dott.sse Saoncella

a.a. 2012/2013

LEZIONE DEL 28/1/2013

DEFINIZIONE (Serie di funzioni)

Data una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo I di $\mathbb{R}$, definiamo una nuova successione di funzioni $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nel seguente modo

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j(x)$$

che verranno chiamate SOMME PARZIALI della serie di funzioni

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$$

DEFINIZIONE (Modi di convergenza)

Diremo che la serie $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$

- CONVERGE PUNTUALMENTE a s, se si ha che se

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} |s_n(x) - s(x)| = 0$$

- CONVERGE UNIFORMEMENTE a s, se si ha che se

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - s\|_\infty = 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |s_n(x) - s(x)| = 0$$

- CONVERGE TOTALMENTE a S, se

esiste una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

(i) $|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Valgono i seguenti fatti:

(i) La convergenza totale implica quella uniforme

(ii) la convergenza uniforme implica quella puntuale

(iii) Nessuna delle due implicazioni opposte è vera.

SERIE DI POTENZE

DEFINIZIONE (Serie di Potenze)

Si dice serie di potenze di centro $x_0 \in \mathbb{R}$, una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (*)$$

dove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione a valori reali. Gli a_n vengono chiamati i coefficienti della serie di potenze.

Per studiare la convergenza di (*) ci possiamo limitare al caso $x_0=0$. Osserviamo che quando $x=0$, si ha che (*) converge. Pertanto ci saranno alcuni valori di x che mi faranno convergere la serie, altri no. Consideriamo ora una palla di centro l'origine e raggio R, cioè $B(0,R)$, che verrà chiamato CERCHIO di convergenza. Mentre il raggio R sarà definito nel seguente modo

$$R = \sup\{r>0 \text{ tale che } \sum a_n x^n \text{ converge } \forall x\in B(0,r)\}$$

Per il calcolo del raggio di convergenza vale il seguente criterio:

TEOREMA (Criterio del rapporto e criterio della radice).

Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, si suppongo che esista il limite

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{oppure} \quad \ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Allora il raggio di convergenza della serie è

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \neq 0 \wedge \ell \neq \infty \\ +\infty & \ell = 0 \\ 0 & \ell = \infty \end{cases}$$

ESEMPIO

Si calcoli il raggio di convergenza della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

La serie geometrica altro non è che una serie di potenze di centro $x_0=0$ e coefficiente $a_n=1$. Quindi si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

Pertanto abbiamo trovato che $R=1$ (per il criterio precedente).

Quindi il cerchio di convergenza è $B(0,1)$. Questo implica che si ha convergenza per $x \in (-1,1)$.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

Che cosa succede agli estremi? Agli estremi dell'intervallo non è detto che si abbia convergenza.

Ritorniamo al nostro esempio:

- Se $x=1$ allora si ha $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ e questa serie diverge.
- Se $x=-1$ allora si ha $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ e questa serie è irregolare.

Quindi gli estremi dell'intervallo devono essere studiati a parte

ESEMPIO

Calcoliamo il raggio di convergenza della serie esponenziale.
La serie esponenziale ha espressione

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

cioè è una serie di potenze di centro $x_0=0$ e coefficiente $a_n = \frac{1}{n!}$.
Applichiamo il criterio del rapporto per studiare la convergenza.
Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0$$

quindi abbiamo che $R=+\infty$. Ciò significa che la serie converge su tutto $\mathbb{R}$.
Vediamo ora delle proprietà delle serie di potenze che sono molto importanti perché ci permettono di derivare o integrare termine a termine la serie.

TEOREMA (Proprietà delle serie di potenze)
Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ e supponiamo che il suo raggio di convergenza R sia positivo. Allora

(i) $\forall r \in (0,R)$ la serie data converge totalmente nell'intervallo $[x_0-r, x_0+r]$

(ii) La somma della serie data, cioè la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

è una funzione continua nell'intervallo (x_0-R, x_0+R); inoltre è derivabile nello stesso intervallo e la serie può essere derivata termine a termine infinite volte

(iii) La funzione $f(x)$ ammette una primitiva nell'intervallo (x_0-R, x_0+R) che può essere calcolata termine a termine.

(iv) Per ogni intervallo $[a,b] \subset (x_0-R, x_0+R)$ la funzione $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ e si può integrare termine a termine.

SERIE TRIGONOMETRICHE E SERIE DI FOURIER.

DEFINIZIONE (Polinomio trigonometrico di ordine n).

Si dice POLINOMIO TRIGONOMETRICO di ordine n una funzione così definita

$$P_n(x) := a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

dove a_k, b_k sono numeri reali o complessi assegnati.

DEFINIZIONE (Serie trigonometrica)

Si dice SERIE TRIGONOMETRICA un espressione del tipo

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k (\sin(kx))$$

Vediamo ora alcune condizioni per la convergenza di serie trigonometriche.

PROPOSIZIONE

Sia $\{a_n\}$ una successione a valori reali positivi che tende a zero in maniera monotona. Allora le serie trigonometriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

convergono per ogni $x \in (0, 2\pi)$, mentre le serie trigonometriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nx \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \sin nx$$

convergono per ogni $x \in [0, 2\pi]$ con $x \neq \pi$

Serie di Fourier di una funzione

Dato una serie trigonometrica, se essa converge, allora ha per somma una funzione periodica di periodo 2π.
Se vogliamo sviluppare in serie trigonometrica una funzione, essa dovrà essere definita su tutto $\mathbb{R}$ e avere come periodo 2π.
Dato una funzione $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, sotto quali condizioni può essere trasformata nella somma di una serie trigonometrica?
Come si determinano i coefficienti a_k e b_k?
Per poter rispondere a questa domanda introduciamo lo spazio vettoriale V costituito dalle funzioni $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ integrabili.
Su questo spazio vettoriale è possibile introdurre un prodotto scalare così definito

$$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$

con la relativa norma

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

che a sua volta induce la distanza

$$d(f,g)=\|f-g\|=\left(\int_0^{2\pi}[f(t)-g(t)]^2\,dt\right)^{1/2}$$

Da qui a seguire chiameremo lo spazio $V=L^2$.