IL CALCOLO DELLE PROBABILITA'

ESPERIMENTO:

si dice *deterministico* l'esperimento il cui risultato è prevedibile con certezza;

si dice ***casuale*** l'esperimento il cui risultato non è prevedibile con certezza.

EVENTO:
si dice *evento* il singolo risultato di un esperimento.

- Si dice *evento certo* il risultato di un esperimento deterministico;
- Si dice ***evento casuale*** o ***evento elementare*** il singolo risultato di un esperimento casuale.

SPAZIO CAMPIONARIO o SPAZIO DEGLI EVENTI:

si definisce **spazio campionario** di un *esperimento casuale* l'insieme di tutti i possibili risultati, ovvero *eventi casuali*, di un esperimento casuale.

$$S = \{e_1, e_2, e_3, ...\}$$

Il concetto di *probabilità di un evento casuale* si può definire come un opportuno numero indice, compreso fra *zero* e *uno*, che intende esprimere la possibilità che l'evento medesimo possa verificarsi.

I) **Definizione soggettivista di probabilità**:

la probabilità di un evento casuale è la misura del grado di fiducia che un individuo attribuisce, secondo le sue opinioni e informazioni, al verificarsi dell'evento.

II) **Definizione frequentista o "a posteriori" di probabilità**:

la probabilità di un evento è quel numero cui converge la *frequenza relativa* dell'evento in considerazione, al crescere del numero delle prove, fatte tutte nelle medesime condizioni:

$$P(E) = \underbrace{\lim}_{n \to \infty} \frac{x}{n}$$

$$(Legge - empirica - del - caso)$$

III) **Definizione classica o matematica o "a priori" di probabilità**:

dato un evento casuale E, la probabilità che tale evento si verifichi è data dal valore del seguente rapporto:

$$p(E) = \frac{numero - di - casi - favorevoli}{numero - di - casi - egualmente - possibili}$$

IV) **Definizione assiomatica di probabilità**:

CLASSIFICAZIONE DEGLI EVENTI

Eventi casuali **incompatibili** e eventi casuali **compatibili**

Eventi casuali compatibili: eventi **indipendenti** e eventi **dipendenti**

In via assiomatica la probabilità di un evento E_1 è quel numero reale $\boldsymbol{p}$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1) $0 \leq p \leq 1$
2) se E_1 è un evento certo allora $P(E_1)=1$;
3) se E_1 è un evento impossibile allora $P(E_1)=0$;
4) se E_1, E_2, …, E_n costituiscono una successione finita o un'infinità numerabile di eventi mutuamente incompatibili, di probabilità rispettivamente $P(E_1)$, $P(E_2)$, …, $P(E_n)$, si ha:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$$

dove il simbolo $E_1 \cup E_2$ indica l'unione dei due eventi;

5) se E_1 e E_2 sono due eventi, indicata con $P(E_2/E_1)$ la probabilità di E_2 quando si suppone che E_1 si sia verificato, vale l'assioma della <u>probabilità condizionata</u>:

$$P(E_2 / E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Dove $P(E_1)>0$ e $P(E_1 \cap E_2)$ indica la probabilità dell'intersezione dei due eventi. Per simmetria, si ha anche:

$$P(E_1 / E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

I TEOREMI DELLE PROBABILITA'

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' TOTALI O TEOREMA DELLA "SOMMA"

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' TOTALI PER EVENTI INCOMPATIBILI:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' TOTALI PER EVENTI COMPATIBILI:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE O TEOREMA DEL "PRODOTTO"

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE PER EVENTI INDIPENDENTI

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

IL TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE PER EVENTI DIPENDENTI

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B)$$

ESERCIZIO

In una certa scuola, il 25% degli studenti è stato bocciato in matematica, il 15% è stato bocciato in chimica e il 10% è stato bocciato sia in matematica sia in chimica. Viene scelto a caso uno studente.

a) Se egli è stato bocciato in chimica, qual è la probabilità che sia stato bocciato in matematica?
b) Se egli è stato bocciato in matematica, qual è la probabilità che sia stato bocciato in chimica?
c) Qual è la probabilità che sia stato bocciato in matematica o in chimica?

SOLUZIONI

Sia M={studenti bocciati in matematica} e C={studenti bocciati in chimica}; allora

P(M)=0,25; P(C)=0,15; P(M∩C)=0,10

a) la probabilità che uno studente sia stato bocciato in matematica, se si sa che è stato bocciato in chimica, è

$$P(M/C)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}10}{0{,}15}=\frac{2}{3}$$

b) la probabilità che uno studente sia stato bocciato in chimica, se si sa che è stato bocciato in matematica, è

$$P(C/M)=\frac{P(M\cap C)}{P(M)}=\frac{0{,}10}{0{,}25}=\frac{2}{5}$$

c) Poichè M e C sono eventi compatibili si applica il teorema delle probabilità totali per eventi compatibili:

$$P(MUC)=P(M)+P(C)-P(M\cap C)=0{,}25+0{,}15-0{,}10=0.30=\frac{3}{10}$$

ESERCIZIO

Le bottiglie di vino in vendita in una bottiglieria, classificate secondo la *tipologia* (rosso, bianco, rosé) e la *fascia di prezzo* cui appartengono (prezzo basso, prezzo medio, prezzo alto), risultano così distribuite:

TIPOLOGIA	PREZZO		
	BASSO	MEDIO	ALTO
ROSSO	70	230	500
BIANCO	150	250	300
ROSE'	180	220	100

calcolare:

a) la probabilità di una bottiglia di vino ROSSO oppure di prezzo MEDIO;

b) la probabilità di una bottiglia di vino BIANCO oppure ROSE';

c) la probabilità di una bottiglia di vino BIANCO sapendo che appartiene alla fascia di prezzo ALTO, ovvero *P(vino BIANCO/prezzo ALTO)*;

d) la probabilità di una bottiglia di vino ROSE' e di prezzo MEDIO (l'uno e l'altro).

SOLUZIONI

a) eventi compatibili: P(ROSSOUMEDIO)=800/2000+700/2000-230/2000=0,635
b) eventi incompatibili: P(BIANCOUROSE')=700/2000+500/2000=0,6
c) P(BIANCO/ALTO)=300/900=0,3333
d) P(ROSE'∩MEDIO)=220/2000=0,11

ESERCIZIO

Tre malattie M_1, M_2 e M_3 producono i sintomi *febbre* (F), *ipertensione* (I) e *nessun sintomo* (N) con le frequenze indicate nella seguente tabella:

MALATTIA	SINTOMO		
	F	I	N
M1	50	30	20
M2	10	40	10
M3	0	150	90

Calcolare:

a) qual è la malattia più probabile, indipendentemente dai sintomi;
b) qual è la probabilità di avere la malattia M_1 oppure la malattia M_2 ($P(M_1 U M_2)$);
c) qual è la malattia più probabile se è presente la *febbre*;
d) qual è la probabilità che siano presenti congiuntamente la malattia M_2 e l'*ipertensione* ($P(M_2 \cap I)$);
e) verificare come si può ottenere il risultato di cui in d) usando i Teoremi delle Probabilità.

SOLUZIONI

a) $P(M_1)$=100/400=25%; $P(M_2)$=60/400=15%; $P(\mathbf{M_3})$=240/400=60%
b) $P(M_1 U\ M_2)$= $P(M_1)$+ $P(M_2)$=40%
c) $P(\mathbf{M_1}/F)$=50/60=83,333%; $P(M_2/F)$=10/60=16,6667%; $P(M_3/F)$=0/60=0%
d) $P(M_2 \cap I)$=40/400=10%

e) $P(M_2 \cap I) = P(M_2) * P(I/M_2) = (60/400)*(40/60) = 10\% =$

$= P(I) * P(M_2/I) = (220/400)*(40/220) = 10\%$