

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

6 Settembre 2013

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	18	
problema 2	12	
totale	30	

1. Si consideri un impianto G con $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$, $\Sigma_{uc} = \{e\}$.

Il linguaggio $L(G)$ prodotto dall'impianto non controllato sia

$$L(G) = \{s \in \Sigma^* \mid 0 \leq [\#(a, s) - \#(b, s)] \leq (m - 1); \\ \forall te \leq s : 0 \leq [\#(a, t) - \#(b, t)] \leq (m - 2)\}$$

dove la notazione $\#(\sigma, s)$ denota il numero di eventi σ nella stringa s ; la notazione $te \leq s$ denota i prefissi terminanti in e della stringa s . Perciò $L(G)$ è l'insieme delle stringhe s per cui vale che

- la differenza tra il numero di a e il numero di b è $\leq m - 1$;
- per le sottostringhe terminanti in e delle stringhe s , la differenza tra il numero di a e il numero di b è $\leq m - 2$.

Il linguaggio generato desiderato K sia

$$K = \{s \in \Sigma^* \mid 0 \leq [\#(c, s) - \#(d, s)] \leq (n - 1); \\ \forall te \leq s : 0 \leq [\#(c, t) - \#(d, t)] \leq (n - 2)\}$$

Perciò K è l'insieme delle stringhe s per cui vale che

- la differenza tra il numero di c e il numero di d è $\leq n - 1$;
- per le sottostringhe terminanti in e delle stringhe s , la differenza tra il numero di c e il numero di d è $\leq n - 2$.

Si noti che il K dato non è contenuto in $L(G)$; la parte di K che interessa è solo quella contenuta in $L(G)$, perché si può solo restringere il linguaggio dell'impianto ad un suo sottolinguaggio.

- (a) Si mostrino i grafi degli automi minimizzati che generano il linguaggio dell'impianto $L(G)$ e quello della specifica K per $m = 3, n = 3$.

Traccia di soluzione.

Vedi gli schizzi nel foglio allegato.

Si assume che il linguaggio $L(G)$ sia chiuso rispetto al prefisso (ipotesi comunemente adottata nella teoria del controllo supervisore), così che esso sia un linguaggio regolare e perciò sia generato da un automa con un numero finito di stati.

Si assume anche che il linguaggio desiderato K sia chiuso rispetto al prefisso (si noti infatti che si parla di linguaggio generato che per definizione è chiuso rispetto al prefisso).

In conclusione, i linguaggi $L(G)$ e K (con le ipotesi che siano chiusi rispetto al prefisso) sono regolari e perciò esistono generatori con un numero finito di stati sia per $L(G)$ che per K .

Si noti che i simboli $[]$ non indicano il modulo, perciò la differenza tra le a e b (e tra le c e d) non può essere negativa.

- (b) Il linguaggio K e' controllabile ? Si enunci la definizione di controllabilita' di un linguaggio e la si applichi a questo esempio.

Traccia di soluzione

Definizione Siano K e $M = \overline{M}$ linguaggi sull'alfabeto di eventi E , con $E_{uc} \subseteq E$. Si dice che K e' controllabile rispetto a M e E_{uc} , se per tutte le stringhe $s \in \overline{K}$ e per tutti gli eventi $\sigma \in E_{uc}$ si ha

$$s\sigma \in M \Rightarrow s\sigma \in \overline{K}.$$

[equivalente a $\overline{K}E_{uc} \cap M \subseteq \overline{K}$]

Per la definizione di controllabilita', si ha che K e' controllabile se e solo se \overline{K} e' controllabile.

Si applichi la definizione di controllabilita' al nostro esempio dove $M = L(G)$.

K non e' controllabile. Ad esempio, $c^{n-1} \in \overline{K}$ (la differenza tra le c e le d e' $\leq n - 1$), $c^{n-1}e \in L(G) \setminus \overline{K}$, dato che $c^{n-1}e$ puo' essere prodotto dall'impianto (cioe' $c^{n-1}e \in L(G)$), e non puo' essere disabilitato, e $c^{n-1}e \notin \overline{K}$ (cioe' $c^{n-1}e$ non e' parte della specifica, poiche la differenza tra le c e le d nella stringa stessa $c^{n-1}e$ terminante in e non e' $\leq n - 2$).

Intuitivamente, dopo che l'impianto produce l'evento c per $n - 1$ volte di seguito, l'impianto dovrebbe disabilitare e per rimanere nella specifica perche' l'occorrenza di e restringe la differenza tra le c e le d ad essere $\leq n - 2$, ma non puo' farlo perche' e e' incontrollabile.

- (c) Si descriva brevemente un algoritmo per calcolare il sottolinguaggio controllabile supremo $K^{\uparrow C}$ contenuto in una data specifica K e lo si applichi al nostro esempio. Si mostri il grafo dell'automa minimizzato che genera $K^{\uparrow C}$ per $m = 3, n = 3$.

Traccia di soluzione

Si puo' usare l'algoritmo generale per il calcolo di $K^{\uparrow C}$ quando K non e' chiuso rispetto al prefisso, anche se nel nostro caso K e' chiuso rispetto al prefisso e percio' potremmo usare la formula esplicita per tale caso ristretto.

L'algoritmo generale richiede di eseguire il prodotto di automi $H_0 = H \times G$ (dove $K = L(H)$) su cui iterare una procedura di rimozione di stati e transizioni, usando la regola per cui si elimina uno stato (h, g) del prodotto se c'e' un evento incontrollabile non definito per (h, g) ma definito invece per la componente di stato g nell'automa G . [Inoltre ad ogni iteratione si applica l'operatore di raggiungibilita' e co-raggiungibilita' se il linguaggio marcato e' diverso da quello generato, che non e' il nostro caso]. Si vedano le dispense per la descrizione precisa dell'algoritmo.

Il prodotto $H_0 = H \times G$ ha nm stati. Al primo passo dell'iterazione si rimuovono gli stati (e le transizioni ad essi) del tipo $(n, i), 0 \leq i \leq m-1$, perche' negli stati i -esimi di G ($0 \leq i \leq m-1$) e' definito l'evento incontrollabile e che non e' definito nello stato n -esimo di H . Non ci sono ulteriori rimozioni di stati e l'automa risultante H_1 ha $nm - (m-1) = m(n-1) + 1$ stati.

Si ottiene il seguente sottolinguaggio controllabile supremo:

$$\begin{aligned} K^{\uparrow C} = & \{s \in \Sigma^* \mid 0 \leq [\#(a, s) - \#(b, s)] \leq (m-2); \\ & 0 \leq [\#(c, s) - \#(d, s)] \leq (n-2)\} \\ & \cup \{s \in \Sigma^* \mid 0 \leq [\#(a, s) - \#(b, s)] = (m-1); \\ & 0 \leq [\#(c, s) - \#(d, s)] \leq (n-1); \\ & \forall t e \leq s : 0 \leq [\#(a, t) - \#(b, t)] \leq (m-2)\}. \end{aligned}$$

Si allega uno schizzo dei grafi degli automi generatori richiesti.

2. Si consideri il seguente automa temporizzato con due orologi x_1 e x_2 (e un'uscita $y(t) \equiv (x_1, x_2)$):

- locazioni: l_1, l_2 , dove l_1 e' una locazione iniziale, con condizioni iniziali $x_1 := 0, x_2 := 0$.
- dinamica della locazione l_1 : $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 1$,
invariante della locazione l_1 : $(x_1, x_2) \in \text{Reali} \times \text{Reali}$,
dinamica della locazione l_2 : $\dot{x}_1 = 1, \dot{x}_2 = 1$,
invariante della locazione l_2 : $(x_1, x_2) \in \text{Reali} \times \text{Reali}$;
- transizione e_1 da l_1 a l_2 : $A/y(t), x_1' := 0, x_2' := x_2$,
transizione e_2 da l_2 a l_1 : $B/y(t), x_1' := x_1, x_2' := x_2$,
dove $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 3 \wedge x_2 \leq 2\}$,
dove $B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 1\}$
(la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perche' il sistema e' autonomo;
- uscita $y(t) \in \text{Reali} \times \text{Reali}$.

(a) Si disegni il diagramma di transizione dell'automata, annotando con precisione locazioni e transizioni.

(b) Si considerino gli stati (prodotto cartesiano di una locazione e una regione in R^2)

- i. $P_1 = (l_1, \{1 < x_2 < x_1 < 2\})$,
- ii. $P_2 = (l_1, \{0 < x_2 = x_1 < 1\})$,
- iii. $P_3 = (l_2, \{0 < x_2 < 1, 1 < x_1 < 2, x_2 < x_1 - 1\})$,
- iv. $P_4 = (l_2, \{1 < x_2 < 2, x_1 = 0\})$.

Si rappresentino tali stati graficamente (con un diagramma cartesiano per la locazione l_1 e uno per la locazione l_2).

- (c) Si definisca formalmente $Pre_\tau(P)$, l'operatore predecessore di P per effetto della transizione τ che indica lo scorrere del tempo (cioè τ indica l'evoluzione dell'automa ibrido per integrazione della dinamica definita nella locazione associata a P). Si spieghi la definizione.

Traccia di soluzione.

$$Pre_\tau(P) = \{(q, x) \in Q \times R^2 \mid \exists (q', x') \in P, t \geq 0 \text{ tale che } (q = q') \wedge (x' = x + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})\}.$$

- (d) si calcolino gl'insiemi $Pre_\tau(P_2)$, $Pre_\tau(P_3)$, $Pre_\tau(P_4)$, $Pre_\tau(P_1)$. Si consideri solo la regione $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Si mostrino gl'insiemi graficamente.

Traccia di soluzione.

Gl'insiemi predecessori si calcolano come segue:

$$\begin{aligned}
 Pre_\tau(P_2) &= P_2 \cup (\{l_1\} \times \{x_1 = x_2 = 0\}) \\
 Pre_\tau(P_3) &= P_3 \cup (\{l_2\} \times \{(1 < x_1 < 2) \wedge (x_2 = 0)\}) \\
 Pre_\tau(P_4) &= P_4 \\
 Pre_\tau(P_1) &= P_1 \cup \\
 &\quad \cup (\{l_1\} \times \{(1 < x_1 < 2) \wedge (x_2 = 1)\}) \\
 &\quad \cup (\{l_1\} \times \{(1 < x_1 < 2) \wedge (0 < x_2 < 1) \wedge (x_1 - 1 < x_2)\}) \\
 &\quad \cup (\{l_1\} \times \{(x_1 = 1) \wedge (0 < x_2 < 1)\}) \\
 &\quad \cup (\{l_1\} \times \{(0 < x_1 < 1) \wedge (0 < x_2 < 1) \wedge (x_1 > x_2)\}) \\
 &\quad \cup (\{l_1\} \times \{(0 < x_1 < 1) \wedge (x_2 = 0)\})
 \end{aligned}$$

(e) Si consideri la seguente affermazione: *Tutti gl'insiemi P_{re} sono unioni di elementi del grafo delle regioni, un fatto usato nella dimostrazione che il grafo delle regioni definisce una bisimulazione.*

Se ne spieghi il significato.