

Calcolare, se $\exists$,

$$\int_{-\infty}^1 (x^2+1)e^x dx$$

giustificando tutti i passaggi.

Definire l'integrale di una funzione f sull'intervallo non limitato $(a, +\infty)$ RisDef. Sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists \int_a^x f(t) dt \quad \forall x > a$ (in senso proprio o improprio)Si dice che f ha integrale improprio convergente in $[a, +\infty)$ se $\exists$ finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$.In tal caso si pone $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$.Sia $f(x) = (x^2+1)e^{+x}$ definita e continua in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists \int_a^{+\infty} f(t) dt, \forall x < 1$

$$\text{Considero } \int \underbrace{(x^2+1)}_g \underbrace{e^x}_{f'} dx = (x^2+1)e^x - \int 2xe^x dx$$

$$f' = e^x \quad g = x^2+1$$

$$f = e^x \quad g' = 2x$$

$$\text{Considero } \int \underbrace{x}_g \underbrace{e^x}_{f'} dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$f' = e^x \quad g = x$$

$$f = e^x \quad g' = 1$$

$$\text{allora } \int (x^2+1)e^x dx = (x^2+1)e^x - 2(xe^x - e^x) + c = (x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

$$\int_x^1 f(t) dt = (t^2+1)e^t - 2te^t + 2e^t \Big|_x^1 = (1+1)e^1 - 2e^1 + 2e - [(x^2+1)e^x - 2xe^x + 2e^x]$$

$$= 2e - 2e + 2e - (x^2+1)e^x + 2xe^x - 2e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2e$$