Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2012/13
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di ALGEBRA

9 luglio 2013

1. (a) Dato un polinomio irriducibile f su un campo K, si definisca quando f è un polinomio separabile su K e si diano almeno due ulteriori condizioni equivalenti alla definizione.

   (b) Si definisca quando un'estensione di campi $K \subset F$ è detta separabile.

   (c) Si dimostri che ogni estensione algebrica di un campo K di caratteristica $\text{char}K = 0$ è separabile. (*10 punti*)

2. Sia $F = K[x]/(f)$ dove $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $f = x^3 + x + 1$.

   (a) Si determinino tutti gli elementi di F. (*3 punti*)

   (b) Si determini un generatore del gruppo ciclico $(F \setminus \{0\}, \cdot)$, ovvero un elemento $\alpha \in F$ tale che $F \setminus \{0\} = <\alpha> = \{1, \alpha, \alpha^2, \ldots\}$. (*2 punti*)

   (c) Quale degli elementi di F elencati in (a) è l'elemento inverso $(1 + \alpha)^{-1}$ di $1 + \alpha$? (*3 punti*)

   (d) Si determinino tutti i sottocampi di F. (*3 punti*)

3. Si determinino il campo di riducibilità completa F di $x^4 + 16$ su $\mathbb{Q}$ e il gruppo di Galois $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ (a meno di isomorfismo). (*6 punti*)

4. Si decida se sono veri o falsi i seguenti enunciati (motivando la risposta).

   (a) $x^4 + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$. (*1 punto*)

   (b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^4 + x + 1) \cong GF(16)$. (*1 punto*)

   (c) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[x]$ è un dominio. (*1 punto*)