Prof. Lidia Angeleri, Prof. Francesca Mantese
Università di Verona, 2012/2013
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 8
21 novembre 2012

1. (a) Si calcoli il grado dell'estensione $[L : \mathbb{Q}]$ e si determini una $\mathbb{Q}$-base di L nei casi seguenti:
   i. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3})$
   ii. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{i})$
   iii. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3}, i)$

   (b) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irriducibile di grado 3 che possiede un unico zero reale. Sia L il campo di riducibilità completa di f su $\mathbb{Q}$. Si determini $[L : \mathbb{Q}]$.

   (8 punti)

2. (a) Sia $K \subset K(\alpha)$ un'estensione di campi di grado dispari. Si mostri che $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

   (b) Sia $u = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$. È vero che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^2)$?

   (8 punti)

3. Sia $u = \sqrt[3]{5}\epsilon$, dove $\epsilon \in \mathbb{C}$ è una radice sesta primitiva dell'unità.

   (a) si provi che u è algebrico su $\mathbb{Q}$ e se ne determini il polinomio minimo $f \in \mathbb{Q}[x]$.

   (b) si calcoli $[\mathbb{Q}(u) : \mathbb{Q}]$ e si verifichi che $\epsilon \notin \mathbb{Q}(u)$

   (c) si verifichi che $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \epsilon)$ è il campo di riducibilità completa di f su $\mathbb{Q}$ e se ne determini il grado su $\mathbb{Q}$.

   (*8 punti*)

4. Sia $K \subset F$ un'estensione e sia $K \subset L \subset F$ un campo intermedio.

   (a) Sia $K \subset F$ normale. Si dimostri che $L \subset F$ è normale. Anche $K \subset L$ è sempre normale?

   (b) Si dimostri che $K \subset F$ è separabile se e solo se $K \subset L$ e $L \subset F$ sono separabili.

   (10 punti)

Consegna: giovedì 29 novembre durante la lezione.