Prof. Lidia Angeleri
Università di Verona, 2014/15
Corso di Laurea in Matematica Applicata

Prova scritta per il Corso di Algebra

3 febbraio 2015

Parte 1

1. Siano $f = x^3 + x + 1,\ g = x^2 + x + 1$.
   (a) Si calcoli il massimo comun divisore di f e g in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. (*2 punti*)
   (b) Si scomponga g in polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. (*2 punti*)
   (c) Si scomponga f in polinomi irriducibili in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$. (*2 punti*)
   (d) Si calcoli il massimo comun divisore di f e g in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$. (*2 punti*)

2. (a) Si dia la definizione del sottogruppo commutatore di un gruppo. (*2 punti*)
   (b) Si determini il sottogruppo commutatore del gruppo simmetrico S_3. (*5 punti*)

Punteggio:

vedi retro!!

Parte 2

Nota: chi ha superato la prova intermedia del 2/12/2014 (ottenendo almeno *9 punti*) può svolgere solo questa seconda parte della prova scritta.
In tal caso l'esame va consegnato **dopo 60 minuti** e per superarlo sono necessari almeno *9 punti*.

4. Ricordiamo: un campo K è detto *perfetto* quando ogni polinomio non costante $f \in K[x]$ è separabile.
   (a) Si dimostri che ogni campo di caratteristica zero è perfetto.
   (b) Per un campo K di caratteristica $p \neq 0$ si definisca l'omomorfismo di Frobenius e lo si usi per caratterizzare quando K è perfetto.
   (c) Si dimostri che ogni campo finito è perfetto.

   (*2+4+2 punti*)

5. Sia F il campo di riducibilità completa del polinomio $f = x^3 - 10$ su $\mathbb{Q}$.
   (a) Si determini (a meno di isomorfismo) $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$. (*4 punti*)
   (b) Si determini (a meno di isomorfismo) il gruppo di Galois $H = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}_3)$, dove $\mathbb{Q}_3$ è il campo di riducibilità completa del polinomio $g = x^3 - 1$ su $\mathbb{Q}$. (*3 punti*)

Nome: .... **Matricola:** .... **Punteggio totale:**

vedi retro!!