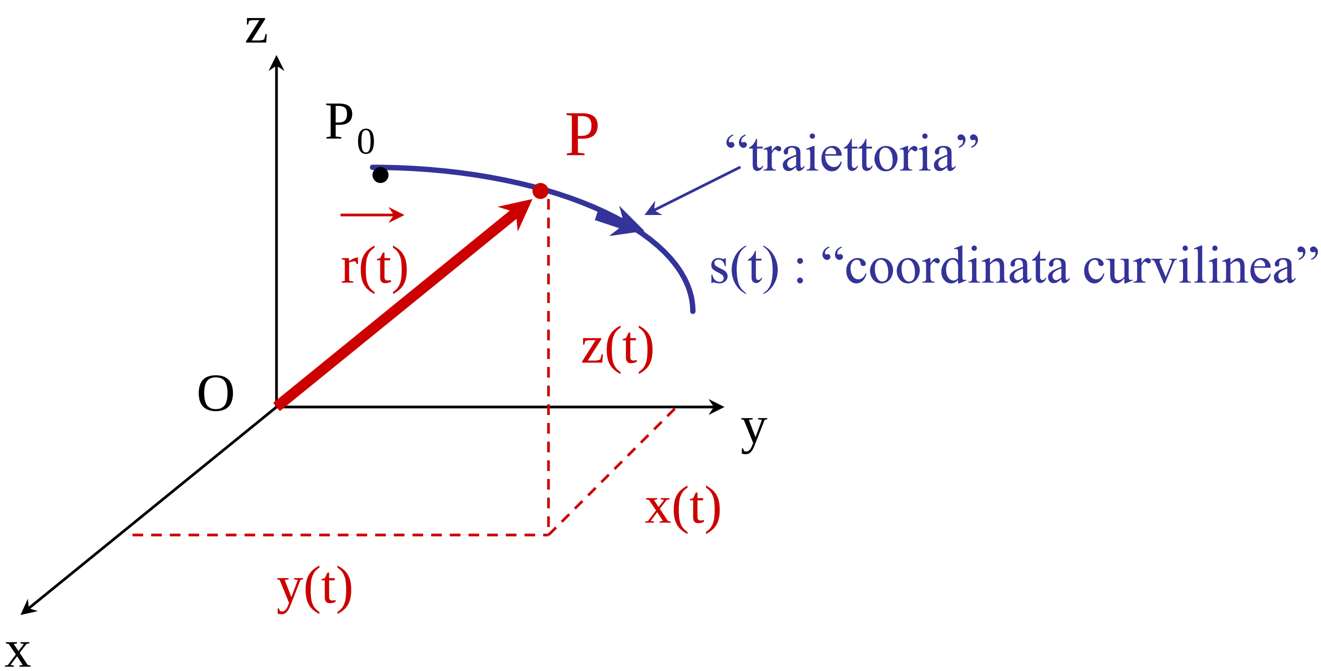
Moto curvilineo nello spazio tridimensionale

Moto di un "punto materiale" P in un sistema di riferimento in coordinate cartesiane Oxyz,t

Legge del moto è data dal vettore: $\overrightarrow{OP}(t) \equiv \vec{r}(t) \equiv \big(x(t), y(t), z(t)\big)$



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow$$

"equazioni parametriche" del moto in funzione del tempo t.

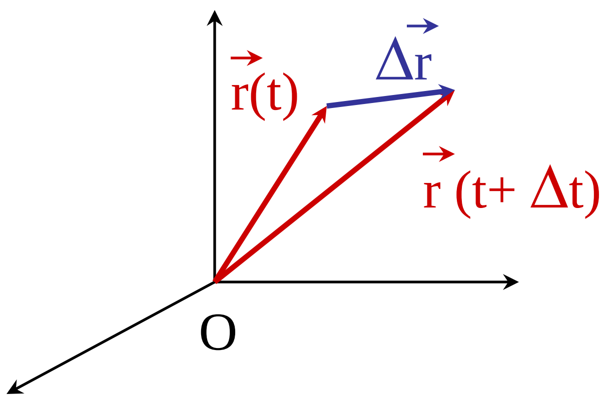
Eliminando il tempo, ad es. invertendo la funzione x(t) : t= t(x)

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} y = y\,[\,t(x)] = f_y(x) \\ z = z\,[\,t(x)] = f_z(x) \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

"equazioni della traiettoria"

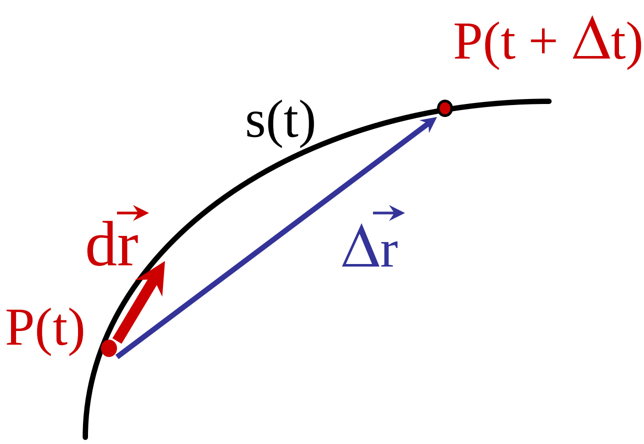
Vettore **velocità istantanea**:

$$\boxed{\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}$$



Significato geometrico del vettore velocità istantanea:

La velocità istantanea è un vettore tangente alla traiettoria



$$\Delta\vec{r}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}d\vec{r}=ds\,\vec{u}_T$$

versore tangente

$$\boxed{\vec{v}(t)\equiv\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\vec{u}_T=v(t)\vec{u}_T}$$

velocità scalare

- Componenti cartesiane del vettore velocitá:

$$\vec{v} \equiv (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)$$

Infatti:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \frac{d(x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z)}{dt} =$$

$$= \frac{dx(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz(t)}{dt}\vec{u}_z =$$

$$= v_x(t)\vec{u}_x + v_y(t)\vec{u}_y + v_z(t)\vec{u}_z$$

- Problema inverso: da **v**(t) a **r**(t)

Se è nota la funzione (vettoriale) velocità, la legge del moto $\vec{r}(t)$ si ottiene per integrazione :

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} \equiv \vec{r}(t) - \vec{r}(t_o) = \int d\vec{r} = \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t')dt'$$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{v}(t')dt'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= x(t_o) + \int_{t_o}^{t} v_x(t')dt' \\ y(t) &= y(t_o) + \int_{t_o}^{t} v_y(t')dt' \\ z(t) &= z(t_o) + \int_{t_o}^{t} v_z(t')dt' \end{aligned}$$

Vettore **accelerazione istantanea**:

$$\boxed{\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}}$$

- Componenti cartesiane dell'accelerazione:

$$\boxed{\vec{a} \equiv (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right)}$$

Infatti:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \equiv \frac{d(v_x(t)\vec{u}_x + v_y(t)\vec{u}_y + v_z(t)\vec{u}_z)}{dt} =$$

$$= \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{u}_x + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{u}_y + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{u}_z =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\vec{u}_x + = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)\vec{u}_y + = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)\vec{u}_z =$$

$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{u}_z =$$

$$= a_x(t)\vec{u}_x + a_y(t)\vec{u}_y + a_z(t)\vec{u}_z$$

- Problema inverso: da **a**(t) a **v**(t) e **r**(t):

Dall'accelerazione **a**(t) alla velocita' **v**(t):

Invertendo la relazione che definisce l'accelerazione

e integrando in funzione del tempo :

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta\vec{v} \equiv \vec{v}(t) - \vec{v}(t_o) = \int d\vec{v} = \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t')dt'$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_o) + \int_{t_o}^{t} \vec{a}(t')dt'} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_x(t_o) + \int_{t_o}^{t} a_x(t')dt' \\ v_y(t) = v_y(t_o) + \int_{t_o}^{t} a_y(t')dt' \\ v_z(t) = v_z(t_o) + \int_{t_o}^{t} a_z(t')dt' \end{cases}$$

Dalla velocita' **v**(t) alla legge oraria del moto **r**(t)

Una volta nota la la funzione vettoriale velocita' istantanea, la legge oraria del moto **r**(t) si ottiene per integrazione di **v**(t) in funzione del tempo (vedi due diapositive più sopra)