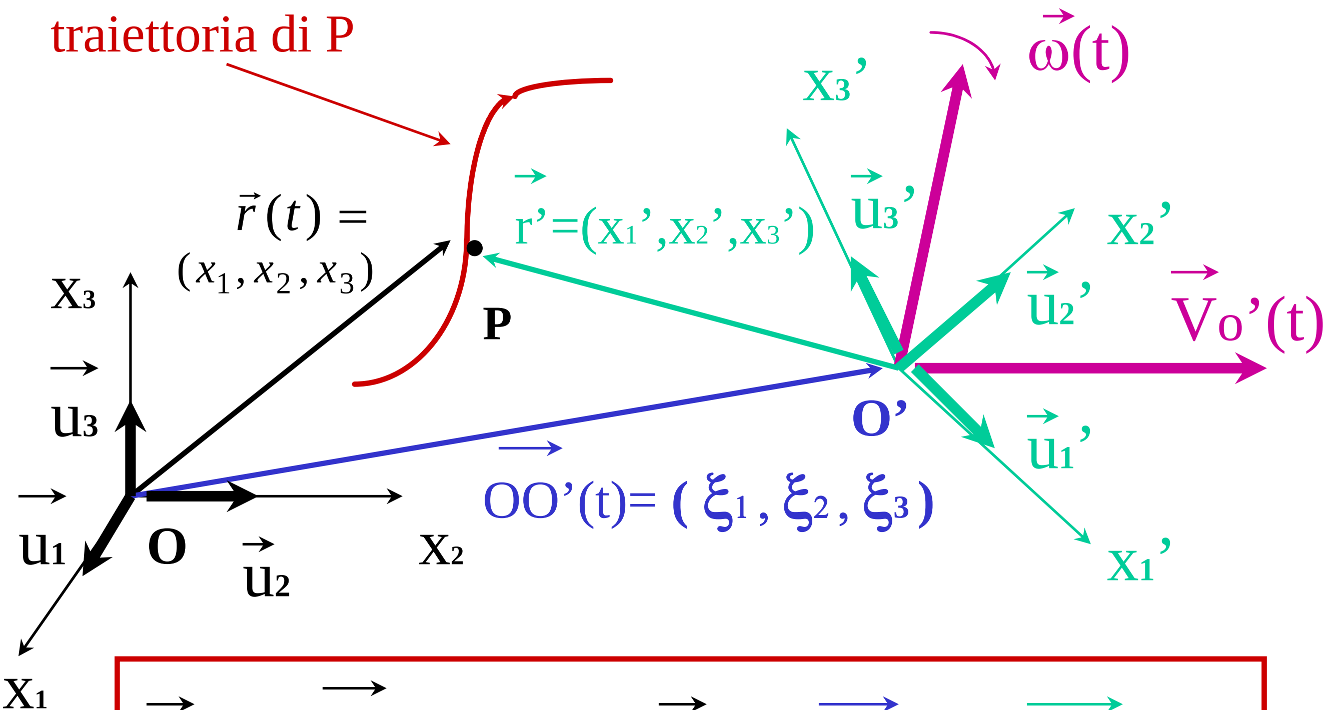
Trasformazioni tra sistemi di riferimento in moto relativo roto-traslatorio



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = \sum_i x_i \vec{u}_i &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \\ &= \sum_i \xi_i \vec{u}_i + \sum x_i' \vec{u}_i'\end{aligned}}$$

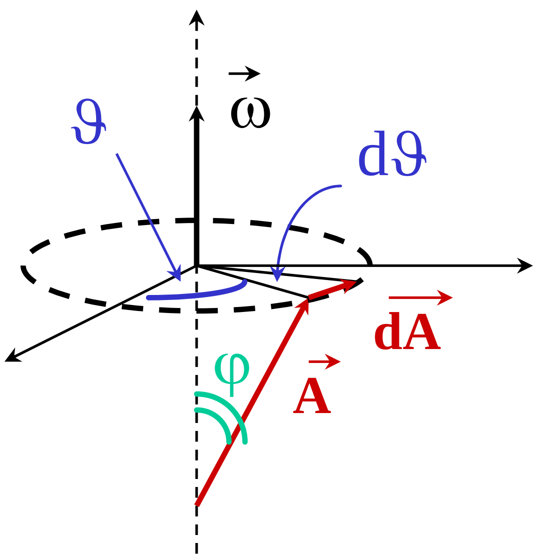
$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\overrightarrow{OP}(t)}{dt} = \frac{d\,(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P})}{dt}$$

$$= \underbrace{\sum_i \frac{d\xi_i}{dt}\vec{u}_i}_{\vec{V}_{o'}} + \sum_i \left(\underbrace{\frac{d x_i'}{dt}\vec{u}_i'}_{\vec{v}'} + x_i' \underbrace{\frac{d \vec{u}_i'}{dt}}_{\vec{\omega} \times \vec{u}_i'} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}_{o'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}')}$$

Moto di “precessione” di un vettore :

rotazione del vettore intorno ad un asse, con velocità angolare di rotazione : $\omega = \dfrac{d\vartheta}{dt}$



Vale la formula di Poisson:

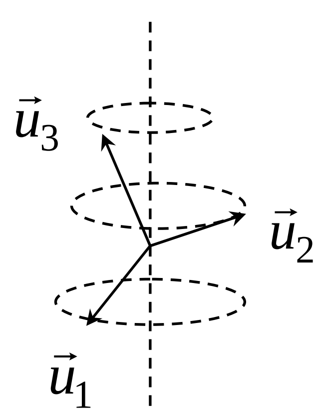
$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}}$$

Infatti: $dA = A \sin\varphi d\vartheta$

$$\Rightarrow \qquad \left|\frac{dA}{dt}\right| = A\frac{d\vartheta}{dt}\sin\varphi = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{\omega}\right|\sin\varphi \equiv \left|\vec{A}\times\vec{\omega}\right|$$

Inoltre $\vec{dA} \perp \vec{A}, \vec{\omega}$ e il suo verso coincide con quello di $\vec{\omega}\times\vec{A}$

Per un sistema di riferimento in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}$, ciascuno dei versori dei suoi assi coordinati compie un moto di precessione :



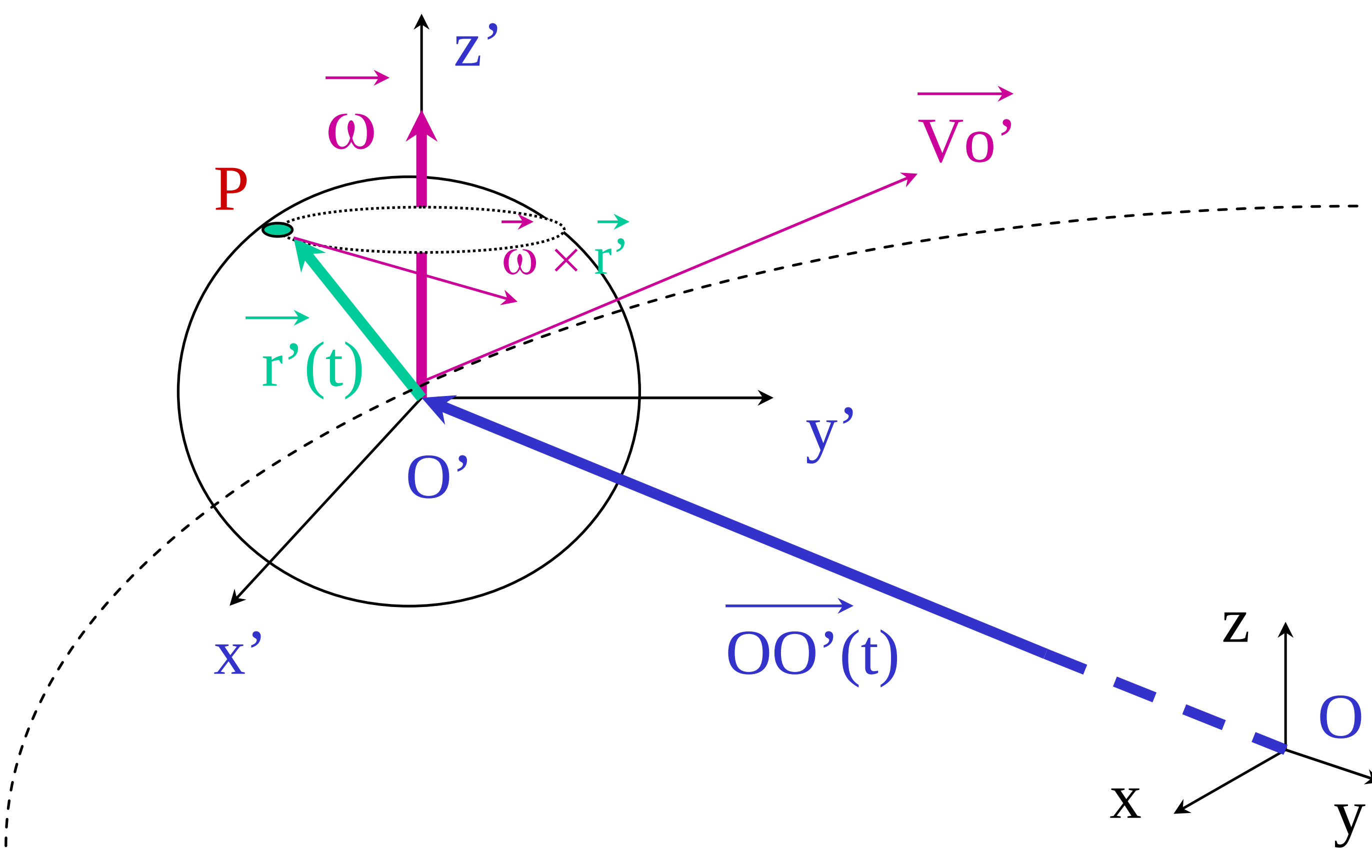
$$\Rightarrow \qquad \frac{d\vec{u}_i}{dt} = \omega \times \vec{u}_i$$

Teorema delle Velocità

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}_{o'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}')}$$

Velocità di trascinamento:

$$\boxed{\vec{v}_{tr} = \vec{V}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$



Accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}' + \vec{V}_{o'} + \vec{\omega}\times\vec{r}'\right) =$$

$$= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{V}_{o'}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\vec{a}_{o'}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum\frac{dx_i'}{dt}\vec{u}_i'\right) = \sum\frac{d^2x_i'}{dt^2}\vec{u}_i' + \sum\frac{d\vec{x}_i'}{dt}\frac{d\vec{u}_i'}{dt}$$

$$= \vec{a}' + \sum\frac{dx_i'}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{u}_i'\right) =$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\sum\frac{dx_i'}{dt}\vec{u}_i' =$$

$$= \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum x_i'\vec{u}_i'\right) =$$

$$= \sum\frac{dx_i'}{dt}\vec{u}_i' + \sum x_i'\frac{d\vec{u}_i'}{dt}$$

$$= \vec{v}' + \sum x_i'\left(\vec{\omega}\times\vec{u}_i'\right)$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega}\times\sum x_i' u_i'$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}'}$$

Trasformazioni di velocità ed accelerazione

tra sistemi di riferimento in moto relativo:

Sistema "assoluto": $\vec{v}$, $\vec{a}$

Sistema "relativo": $\vec{v}'$, $\vec{a}'$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}_{tr} = \vec{v}' + \vec{V}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{Co} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\vec{v}_{tr} = \vec{V}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

"velocità di trascinamento"

$$\boxed{\vec{a}_{tr} = \vec{a}_{o'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}$$

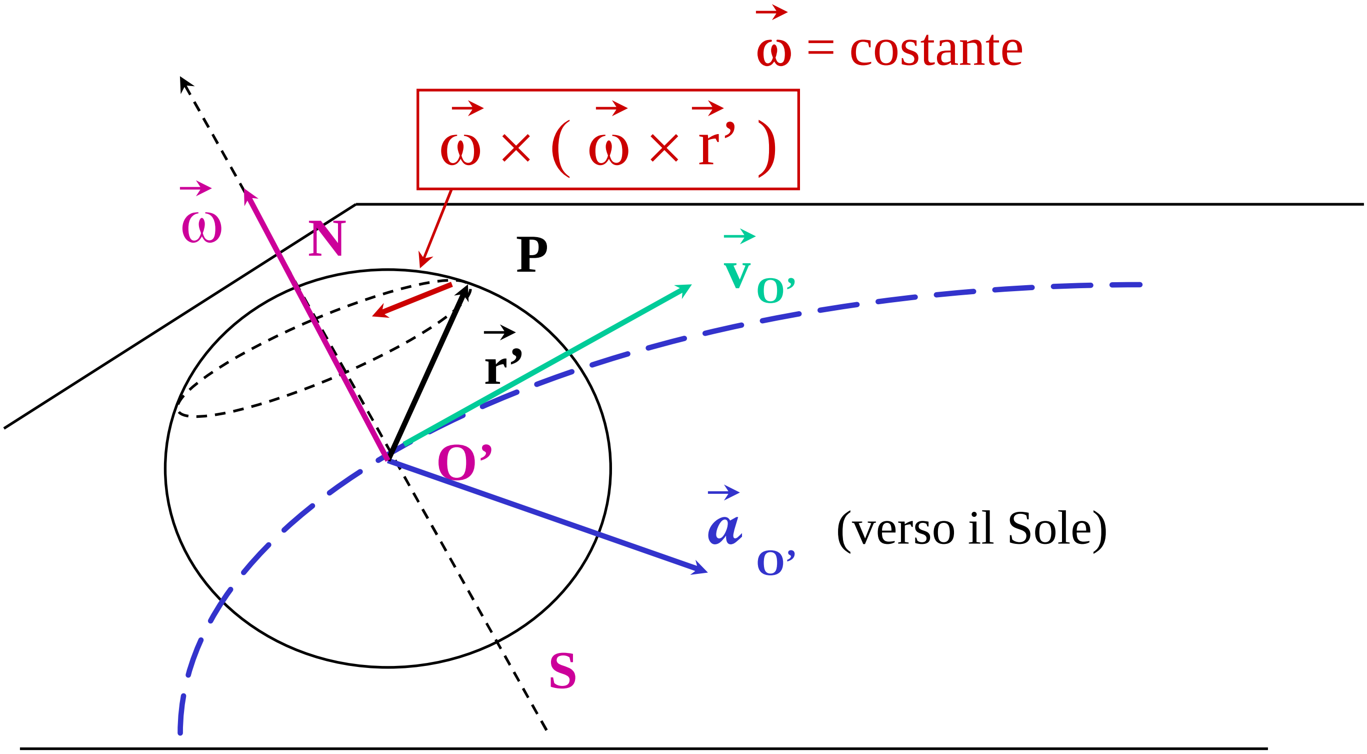
"accelerazione di trascinamento"

$$\boxed{\vec{a}_{Co} = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'}$$

"accelerazione complementare" o "di Coriolis"

Esempio di trasformazione delle accelerazioni :

il moto della Terra :



piano dell'eclittica

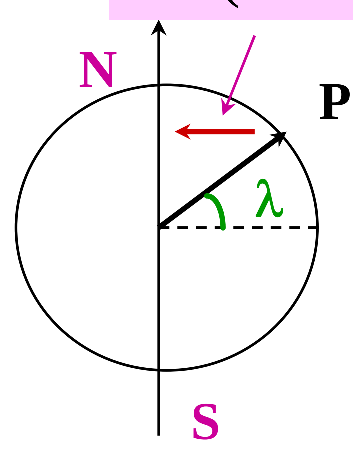
Accelerazione di trascinamento:

$$\boxed{\vec{a}_{tr} = \vec{a}_{o'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}$$

$$a_{o'} = \frac{v_{o'}^2}{R} \approx \frac{(30Km/s)^2}{1{,}5 \cdot 10^8\,Km} \approx 0{,}6cm/s^2 \approx 10^{-3} g$$

distanza Terra-Sole

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$



$$\left|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')\right| = \omega^2 R_T \sin(\pi/2 - \lambda)$$

raggio della Terra

$$= \omega^2 R_T \cos\lambda$$

latitudine

All'equatore:

$$\omega^2 R_T \cong 4cm/s^2 \cong (0{,}4\%)g$$

Esempio: accelerazione di gravità

$$(\vec{\omega} = \text{costante},\ \vec{a}_o \text{ trascurabile})$$

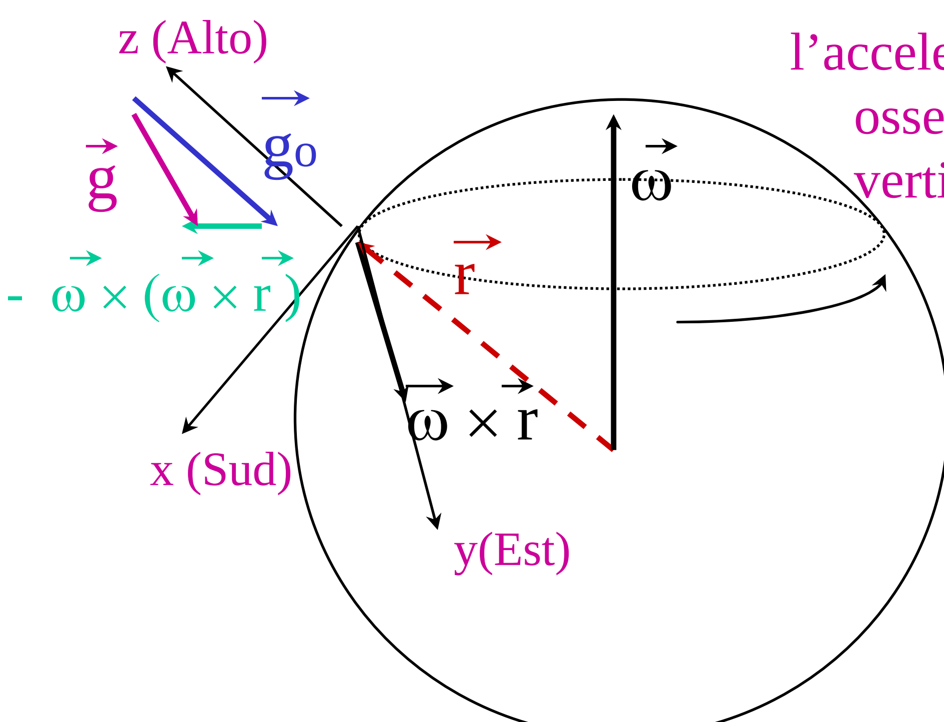
$$\vec{g}_0 = \vec{g} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

accelerazione relativa

accelerazione assoluta

Accelerazione osservata in un sistema solidale con la Terra:

$$\boxed{\vec{g} = \vec{g}_o - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}'}$$



l'accelerazione di gravità osservata (componente verticale) aumenta con la latitudine

(è minima all'Equatore)

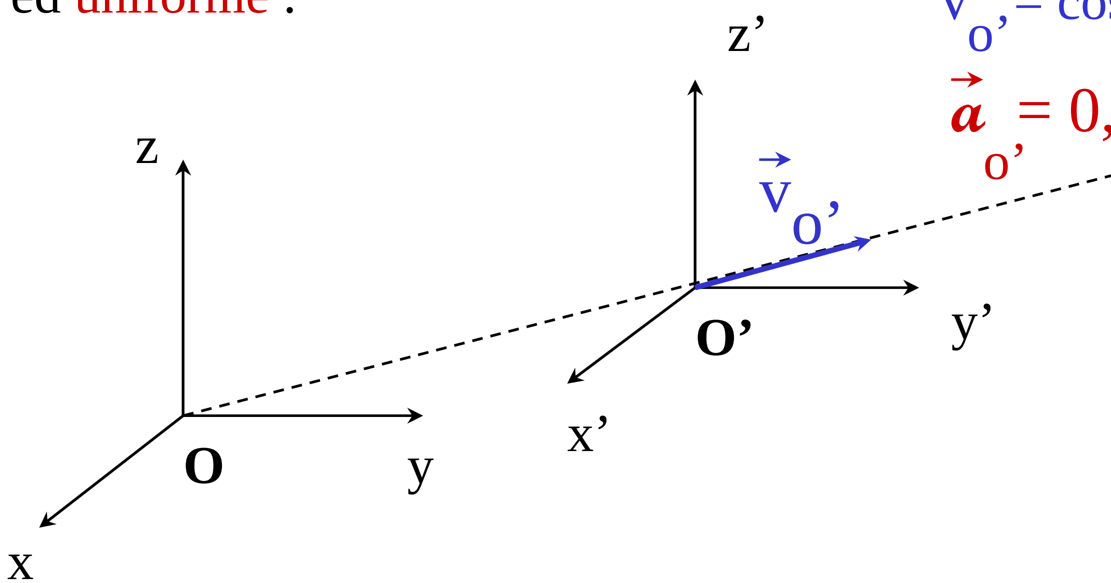
Trasformazioni galileiane

Sistemi di riferimento in moto relativo puramente traslatorio

ed uniforme :

$\vec{V}_{O'} =$ costante

$\vec{a}_{O'} = 0, \quad \vec{\omega} = 0$



"Trasformazioni galileiane":

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \overrightarrow{OO'}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{V}_{O'}t$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \vec{V}_{O'}$$

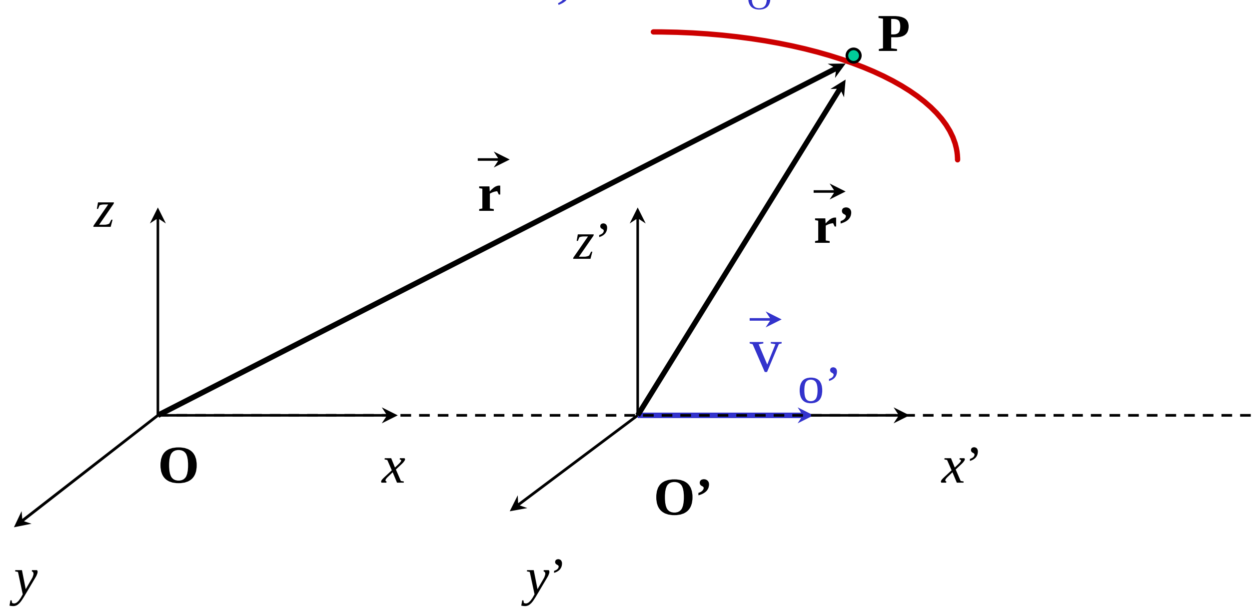
$$\vec{a}(t) = \vec{a}\,'(t)$$

le accelerazioni sono invarianti per trasformazioni galileiane

Le trasformazioni galileiane, che postulano un tempo "assoluto", contraddicono il principio di invarianza della velocità della luce

Trasformazioni galileiane

Scegliendo uno degli assi coordinati parallelo alla velocità relativa di traslazione : $x,\ x' \ // \ \vec{V}_{O'}$



$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{V}_{O'}t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x(t) &= x'(t) + V_{O'}t \\ y(t) &= y'(t) \\ z(t) &= z'(t) \end{aligned}}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}\,'(t) + \vec{V}_{O'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v'_x(t) + V_{O'} \\ v_y(t) &= v'_y(t) \\ v_z(t) &= v'_z(t) \end{aligned}}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}\,'(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} a_x(t) &= a'_x(t) \\ a_y(t) &= a'_y(t) \\ a_z(t) &= a'_z(t) \end{aligned}}$$