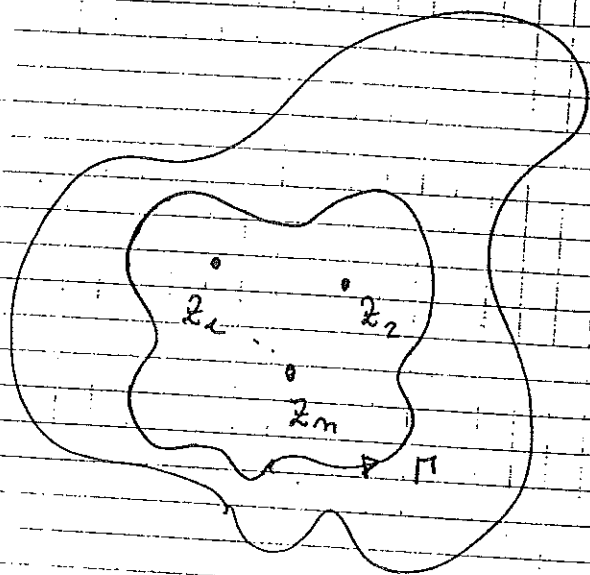


Teorema dei Residui

Sia f olomorfa in $\mathcal{D} - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$

↓
singolarità isolate
in numero finito



Si ha

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}_{z_i} f$$

Sia z_0 uno degli z_i

$$\text{Res}_{z_0} f = a_{-1}$$

= coefficiente di $(z - z_0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent

ii) Se z_0 è un polo di ordine n , i

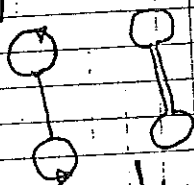
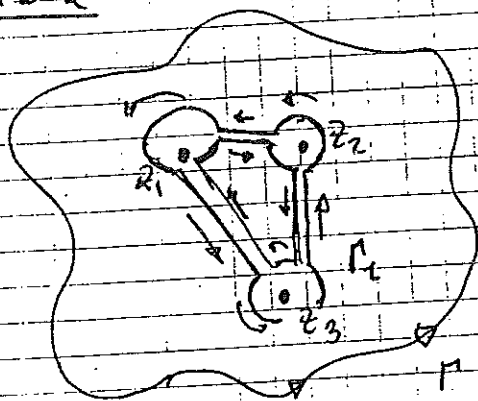
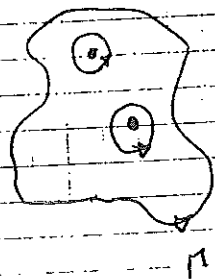
$$\text{Res}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)] \Big|_{z=z_0}$$

per proprietà

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)]$$

Dimostrazione

($n=3$)



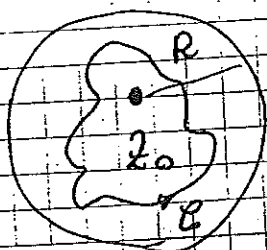
gli integrali si
elimano

con riferimento
 alla figura

$$\star \quad \Gamma_k \sim \Gamma$$

i) Si ha $\int_{\Gamma} f dz = \int_{\Gamma_1} f dz$ e si conclude

ii)



$$\Gamma \sim \sum \gamma_i$$

Dal teorema di Laurent e, in un opportuno

cerchio puntato di raggio R

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$\Rightarrow$ integrandolo si trova facilmente (v. figura)
($\mathcal{C}$ può essere una circonferenza di raggio $0 < r < R$)

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

$\mathcal{C}$ ($\star$ anche direttamente dalla dim. del teor. di Laurent)

da cui l'asserto per def. di residuo in z_0

iii) Sia z_0 un polo di ordine n

Allora

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$$

$$\Rightarrow g(z) := (z-z_0)^n f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k+n}$$

g olomorfa (oltre a z_0)

$$\begin{aligned} h = k+n \\ k = h-n \end{aligned} \quad = \quad \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h-n} (z-z_0)^h$$

$$\Rightarrow a_{-1} = a_{(n-1)-n} = a_{-1} \quad (h=n-1)$$

$$\star \text{ (Taylor)} = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0),$$

da cui l'asserto.

* Osservazioni

1) i) riflette l'importanza omologica del concetto di residuo. Di più si è dimostrato;

||| Divisore più operativa (e risulterà importantissima) attraverso ii) e iii)

Nel caso di singolarità eccezionale, possiamo calcolare il residuo solo direttamente o tramite ii) si osserva che ii) può comparire nella dim. del teorema di Laurent

2) Nella formula iii), nelle applicazioni

si calcola
$$\frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)]$$

(... se non si passa attraverso lo sviluppo di Laurent di f)

* Teorema $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $\{a_1, \dots, a_n\}$
 Teorema di residui globale $\uparrow$
 Singolarità isolate

Allora
$$\sum_i \text{Res}_{a_i}(f) + \text{Res}_\infty(f) = 0$$

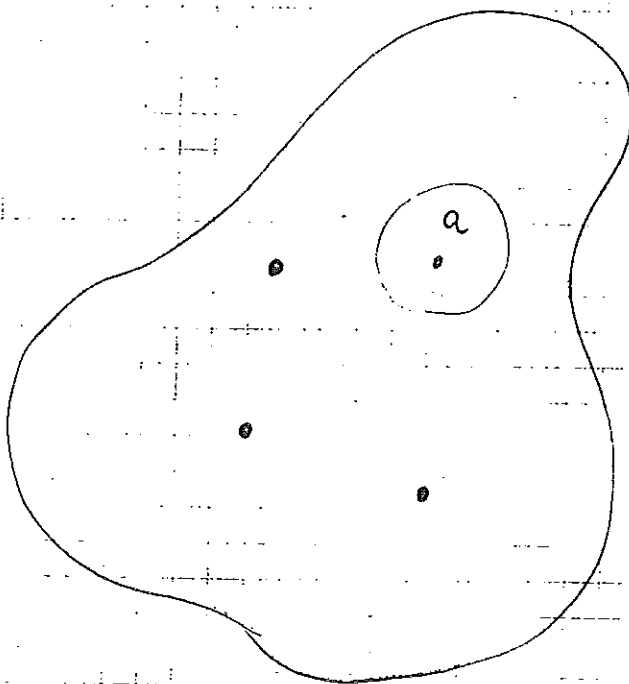
Dim. Immediata dalla def. di residuo al'co.

★ Il principio dell'argomento

★ f è detta meromorfa in Ω se possiede un insieme discreto di singolarità (cioè senza punti di accumulazione), e queste sono poli.

Sia f meromorfa in Ω

con un numero finito di singolarità (polari)



Ex: una test.
di Möbius,
vista da ∞ è
è meromorfa

Sia f olomorfa in a , e $f(a) \neq 0$

Localmente si definisce $\log f(z)$ e così:

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (\text{derivata logaritmica})$$

i cui poli singolari si presentano in gruppi
di f , anche nei suoi zeri ($f=0$)

Osserviamo che

$$d \log f(z) = \underbrace{d \log |f(z)|}_{\text{forma reale}} + i d \arg f(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

forma
Chiusa
non
esatta

★ indicatore logaritmico

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Delta_{\Gamma}(f)$$

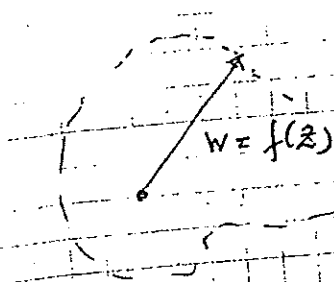
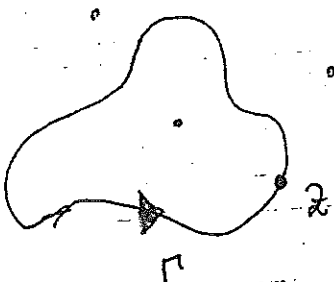
ciclo orientato
positivamente

alterni
a 0

numero di rotazioni
di $w = f(z)$ quando
 z percorre Γ
(in senso antiorario)

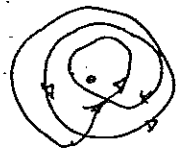
che escluda le
sing di $\frac{f'}{f}$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \text{Variazione di } \arg f(z) \right\}$$



★ Osservazione: se $f(z) = z$ si ottiene

$$\text{ind}_0(\Gamma) = \text{ind}_0[f(\Gamma)]$$

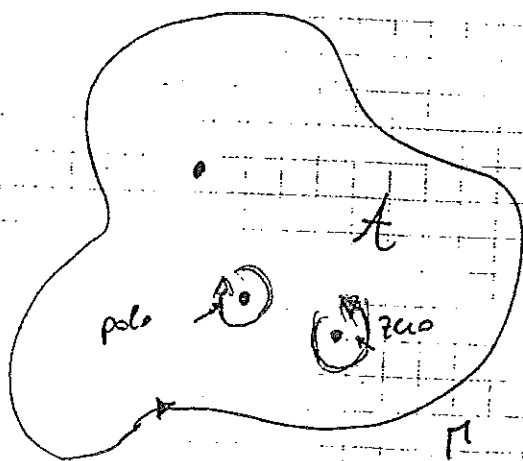


In generale i

$$\Delta_{\Gamma}(f) = \text{ind}_0[f(\Gamma)]$$

Teorema "Principio dell'argomento"
(di Cauchy)

f meromorfe in $\mathcal{A}$



detta anche $\Delta_n(f) = N_{\text{zeri}}(f) - N_{\text{poli}}(f)$

★ formula dell'indicatore
logaritmico

(zeri e poli contenuti in $\mathcal{A}$)

(compresi quelli all'infinito...)

Dimostrazione

Osserviamo che se $z=a$ è uno zero di
ordine n di $f(z)$, allora $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ha

un polo di ordine 1 in a , con residuo $= n$

(Poniamo per semplicità $a=0$...)

Infatti

$$f(z) = z^n a_n + \underbrace{z^{n+1} p_1(z)}_{\text{serie di Taylor}}$$

$$\Rightarrow f'(z) = n a_n z^{n-1} + \underbrace{z^n p_2(z)}_{\text{serie di Taylor}}$$

Da ciò si ha facilmente

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z} \frac{a_n + P_4(z)}{a_n + P_5(z)}$$

(Note: $a_n \neq 0$ in the numerator and $\neq 0$ in the denominator)

$$= \frac{n}{z} (1 + P_6(z)),$$

da cui l'asserto.

Analogamente, se $z=a$ è un polo di ordine n ,
per f , la derivata logaritmica ha in $z=a$ un polo

★ del primo ordine, con residuo $= -n$.

★ Cosa accade se $a = \infty$?

Se f è infinitesima in $z = \infty$, di

ordine n , allora $\frac{f'}{f}$ è in $z = \infty$

("zero" di ordine n)

★ un infinitesimo del primo ordine, con residuo $= n$

(Attenzione!!)

$$\zeta\left(-\frac{1}{z^2}\right)$$

Infatti, si ponga $\zeta = \frac{1}{z}$

$$z \rightarrow \infty \Rightarrow \zeta \rightarrow 0$$

$$f(z = \frac{1}{\zeta}) = \zeta^n (a_n + \zeta p_1(\zeta))$$

$$f'(z = \frac{1}{\zeta}) = \zeta^{n+1} (-n a_n + \zeta p_2(\zeta))$$

(derivazione $\rightarrow ' = \frac{d}{dz}$ $\star$)

$$\Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} = \dots = \boxed{-n\zeta + \zeta^2 p_2(\zeta)}$$

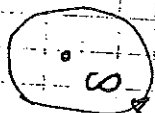
$$= \boxed{-\frac{n}{z} + \frac{1}{z^2} p_2\left(\frac{1}{z}\right)}$$

Da qui è evidente, in virtù della definizione

di residuo all'infinito

(e della sua caratterizzazione)

$$\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (-n\zeta + \zeta^2 p_2(\zeta)) \left(-\frac{1}{\zeta^2} \right) d\zeta = \dots n \right)$$



$\frac{dz}{z^2}$

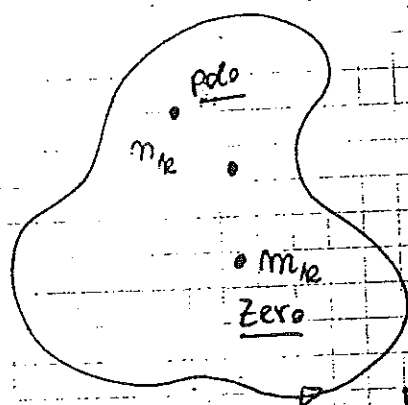
(Ancora una volta si comprende come l'approccio
corretto al concetto di residuo si ottenga attraverso
le forme differenziali..)

Analogamente, se f ha un polo di ordine n all'infinito, la sua derivata logaritmica $\frac{f'}{f}$ ha uno zero del primo ordine in ∞ (ovvero, è infinitesima) con residuo $= -n$

Applicando il teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \underbrace{\sum_{h=1}^r m_{h1}}_{\text{zeri interni}} - \underbrace{\sum_{k=1}^s m_{k2}}_{\text{poli}}$$

$$\Delta_{\Gamma}(f) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \text{variazione di arg } f(z) \right\} = \underbrace{\text{contorni con le loro molteplicità}}_{\text{zeri interni a } \Gamma} - \underbrace{\text{contorni con le loro molteplicità}}_{\text{poli interni a } \Gamma}$$



$$= N_0 - N_{\infty}$$

la formula vale anche per zeri e poli esterni ad un dato contorno...

★ In sintesi:

in tutti i casi	Zero ord. n di f	residuo $= n$ di $d \log f$
	polo ord. n di f	residuo $= -n$ di $d \log f$

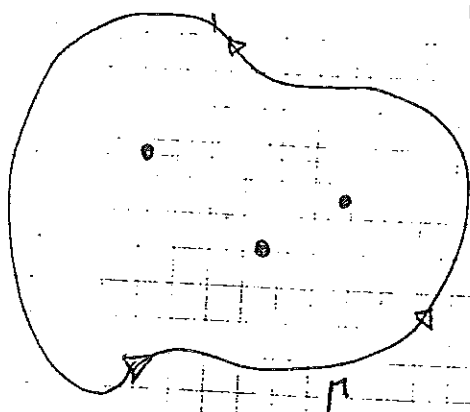
★ Applicazioni del principio dell'argomento

★ Teorema fondamentale dell'algebra

Sia f un polinomio di grado n , $n \geq 1$
 Allora f possiede n zeri (contati con la loro molteplicità)

Dimostrazione

Sia Γ un ciclo orientato positivamente
 contenente gli zeri di f (questi sono
 certamente un numero finito)
 (Ruffini)



(∞)

∞ è un
polo di ordine
 n di f

Si ha, da un lato

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} = N_0$$

Dall'altro

osservazione →

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'}{f} dz = -n$$

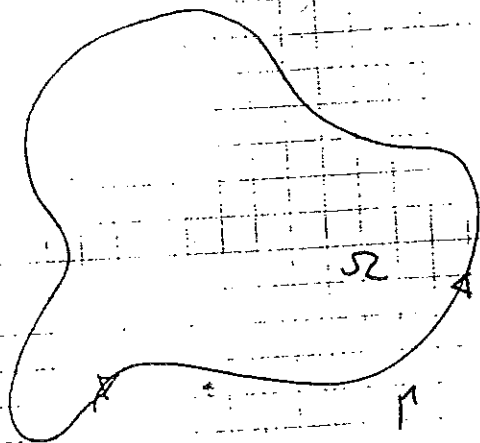
$\Rightarrow$

$$N_0 = n$$

$\parallel \text{Res}_{\infty} \left(\frac{f'}{f} \right)$

□

★ Teorema di Rouché



Siano f, g
 omomorfe di valore
 di Ω e continue su
 Γ . Sia

• $f|_{\Gamma} \neq 0$ e sia

per $z \in \Gamma$ $|f(z)| > |g(z)|$ •

★ Allora f e $f+g$ hanno, in Ω ,
lo stesso numero di zeri

Dim. $|f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0$

su Γ ($\Rightarrow f+g|_{\Gamma} \neq 0$)

$$N_0(f) = \Delta_{\Gamma}(f)$$

$$N_0(f+g) = \Delta_{\Gamma}(f+g)$$

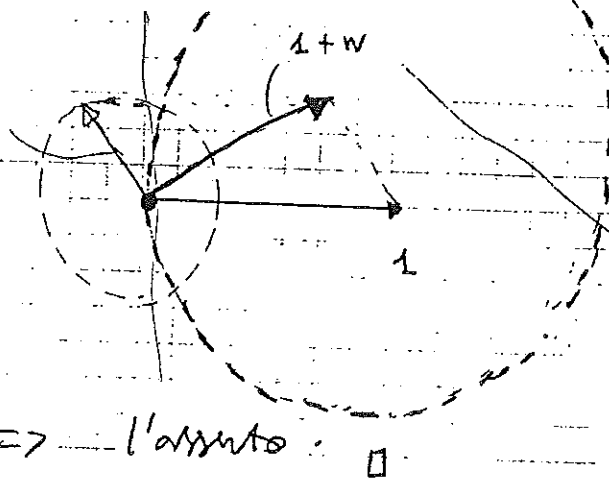
$$\text{ora } \arg(f+g) = \arg\left(f\left(1 + \frac{g}{f}\right)\right)$$

$$\star = \arg f + \arg\left(1 + \frac{g}{f}\right) \quad (\triangle \text{ insieme})$$

= 0

$$\Delta_n(f+g) = \Delta_n(f) + \Delta_n\left(1 + \frac{g}{f}\right)$$

$$w = \frac{g}{f}$$



perché $\left|\frac{g}{f}\right| < 1$ su Γ

non può essere
allontanato da 0!

$\Rightarrow$ l'assunto $\square$

$$|z-1| < 1$$

$\star$ Verifichiamo

$$\text{Si ponga } f_a(z) = f(z) + a g(z)$$

$f_a \neq 0$ e olomorfa per $|a| \leq 1$

$$N_a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'_a}{f_a} dz$$

è una funzione continua ^{(+) da un insieme connesso} a valori interi

ed è perciò costante $\Rightarrow N_0 = N_1 \quad \square$

(+) ind non "salta"

★ un'altra dimostrazione del teorema
fondamentale dell'algebra (3°)

Dmo. Facciamo uso del teorema di Rouché ★

$$f(z) = z^n; \quad f(z) + g(z) = \underbrace{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0}_{g(z)}$$

pol.
monico: $a_n = 1$
(non si può
in generalità)

su un cerchio di centro 0 e raggio
sufficientemente grande R (da scegliere,
in particolare, per cui $f+g$)

★ Solo certamente verificate le ipotesi del
teorema $\Rightarrow f+g$ ha gli stessi zeri di f
(perché?)

nel cerchio, e quindi in $\mathbb{C}$, ossia

n (z=0 è contato n volte...)

★ tale idea già appare in Gauss

★ i) Determinare il numero ⁿ delle radici di

$$P(z) = z^{20} + z^5 + 8z^4 + z + 1$$

in $\{z : |z| \geq 1\}$ ii) Determinare
quella nel primo quadrante. (n_2)

Sol. i) Determiniamo il numero delle radici in

$$\{|z| < 1\} \quad , \quad \text{sia } n_1.$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra

$$\text{risultata } n = 20 - n_1.$$

Applichiamo il teorema di Rouché

$$\text{Sia } f(z) = 8z^4$$

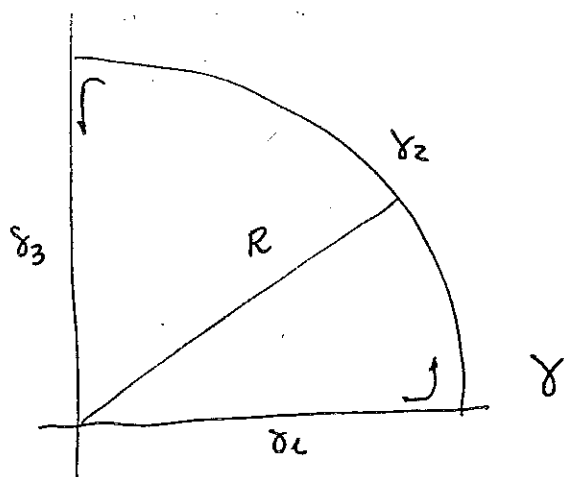
$$g(z) = z^{20} + z^5 + z + 1$$

$$P(z) = f(z) + g(z) \quad \star \text{ su } |z| = 1 \text{ è}$$

$$|g(z)| \leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4 < 8 = |f(z)|.$$

$$\text{Si ha perciò } n_1 = 4 \quad , \quad n = 16 \quad \star$$

11)



osserviamo che $P(z) \neq 0$ per $z \geq 0$.

$$\text{Inoltre } P(iy) = i^{20} y^{20} + i^5 y^5 + 8i^4 y^4 + i y + 1 =$$

$$= y^{20} + i y^5 + 8 y^4 + i y + 1 =$$

$$= y^{20} + 8 y^4 + 1 + i (y^5 + y)$$

$$\neq 0 \quad \forall y \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^5 + y}{y^{10} + 8y^4 + 1} = 0$$

In base al principio dell'argomento, e grazie all'olomorfia di P , è

$$m_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P'}{P} dz = \Delta_{\gamma}(P)$$

$$\text{ora } \Delta_{\gamma_1}(P) = 0 \quad (P \text{ è reale...})$$

$$\Delta_{\gamma_2}(P) = \frac{20}{4} = 5 \quad \text{e} \quad \frac{R \text{ è suff. grande}}{(P|_{\gamma_2} \neq 0!)} \quad \Delta_{\gamma_3}(P) = 0$$

Infatti posto $z = R e^{i\varphi}$

$$e^i P(z) = P(R e^{i\varphi}) = (R e^{i\varphi})^{20} [1 + o(\frac{1}{R})]$$

$$\text{anzi } \arg P(z) = \arg(R e^{i20\varphi}) + \arg(1 + o(\frac{1}{R}))$$

Da cui l'angolo (ci si muove su un quarto di circonferenza).

Calcoliamo $\Delta_{\gamma_R}(P)$, o meglio il suo limite per $R \rightarrow +\infty$.

$$\arg(P(iy)) = \arg\left[\frac{y^5 + y}{y^{20} + 8y^4 + 1}\right]$$

$$\text{Se } y \rightarrow +\infty$$

$$\arg(P(iy)) \rightarrow 0$$

$$\text{Se } y = 0 \quad \arg(P) = 0$$

$$\Rightarrow n = 0 + 5 + 0 = 5 \quad \square$$

In sintesi: Se R è suff. grande,

$$n = \Delta_{\gamma}(P) = \Delta_{\gamma_R}(P)$$

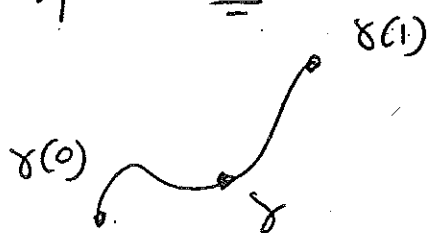
rimane
costante
per R
suff. grande!

$$\Rightarrow \boxed{n = \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{\gamma_R}(P)}$$

↑
è ciò che abbiamo
calcolato



★ Si ricordi

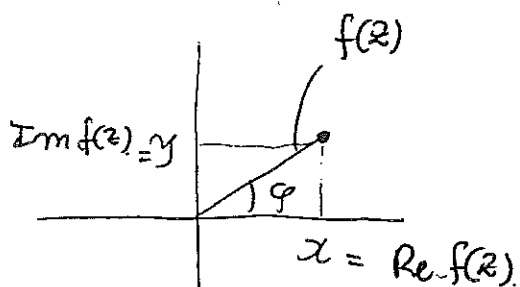


$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$$

φ potenziale !!

$$\Delta_\gamma(f) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma d\varphi(f) = \frac{1}{2\pi} [\varphi(f(\gamma(1))) - \varphi(f(\gamma(0)))]$$

$f|_\gamma \neq 0$ $d\varphi = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ $\neq$ ha validità locale



$$(x, y) \neq (0, 0)$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$x \neq 0$$

$$\boxed{\varphi(f(z)) = \arctg \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Re} f(z)}}$$