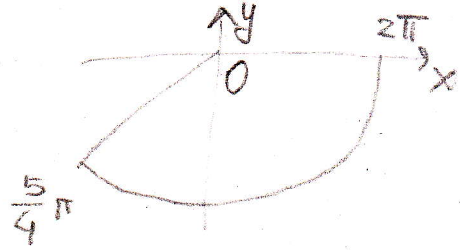
③ Calcolare, se ∃, $\iint_T xy\,dx\,dy$ ove

$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le 0,\ x^2+y^2 \le 1,\ y \le x\}$



Ris Teorema

Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso limitato e misurabile. Sia $f: C \to \mathbb{R}$ limitata

Suppongo che $\exists\ E \subset C$ misurabile con area $E = 0$ ed f sia continua su $C \setminus E$

$\Rightarrow f$ è integrabile

Teorema

Sia $f \in C^0(C \setminus E)$, $C \subset \mathbb{R}^2$, E sottoinsieme di C di area nulla

Sia f limitata in C.

Se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, φ, ψ continue

$$\Rightarrow \iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

se $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \varphi(y) \le x \le \psi(y)\}$, φ, ψ continue

$$\Rightarrow \iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx$$

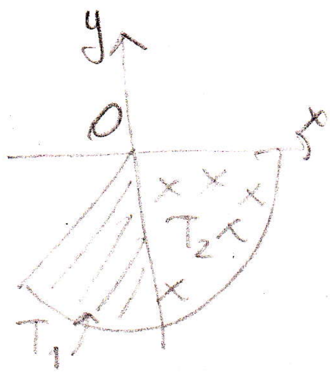
T è un chiuso limitato misurabile del piano

f è continua su T

$\Rightarrow f$ è integrabile su T

$T = T_1 \cup T_2$ con $T_1 = \{-\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le 0,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le x\}$

$T_2 = \{0 \le x \le 1\ \ -\sqrt{1-x^2} \le y \le 0\}$



T_1 e T_2 normali rispetto all'asse x

Usando coordinate polari di centro l'origine T è il trasformato di $K = \{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \rho \le 1,\ \vartheta \in [\frac{5}{4}\pi, 2\pi]\}$

secondo $\phi(\rho,\vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$.

EX3 foglio B parte 1