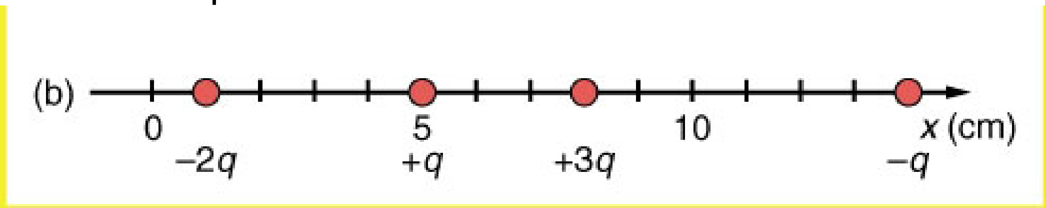
Esercizi Campi elettrici e Potenziale elettrico

1. (**Esame Giugno 2014**) Se la carica q=5.00 nC (nel vuoto)
   a) Trovare il campo elettrico totale a x=1cm.
   b) Trovare il campo elettrico totale a x=11cm.



Soluzione:

Una carica Q posta in $\mathbf{r}'$ genera un campo elettrico che in un punto qualsiasi $\mathbf{r}$ è definito dalla seguente espressione:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3} \quad \varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,817\,62 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

a) Campo elettrico a x=0,01m

$E(r) = 1/(4\pi\varepsilon_0)[q/(0{,}04)^2 + 3q/(0{,}07)^2 - q/(0{,}13)^2]$

$E(r) = 1/(4\pi\varepsilon_0)[\ q.(625) + 3q.(204{,}08) - q.(59{,}17)]$

$E(r) = 1/(4\pi\varepsilon_0)[\ 1.178{,}07.q]$

$E(r) = (1.178{,}07).(5\mathrm{x}10^{-9})/[4.(3{,}1416).(8{,}854\mathrm{x}10^{-12})]$

$E(r) = 5{,}89\mathrm{x}10^{-6}/111{,}26\mathrm{x}10^{-12} = 0{,}05293906\mathrm{x}10^{6}$

$E(r) = 52.939{,}06$ N/C oppure V/m

b) Campo elettrico a x=0,11m

$E(r) = 1/(4\pi\varepsilon_0)[-2q/(0{,}10)^2 + q/(0{,}06)^2 + 3q/(0{,}03)^2 - q/(0{,}03)^2]$

$E(r) = 1/(4\pi\varepsilon_0)[-2q/(0{,}10)^2 + q/(0{,}06)^2 + (3q-q)/(0{,}03)^2]$

$E(r) = 1/(4\pi\varepsilon_0)[-200.q + 277{,}78.q + 2.222{,}22q]$

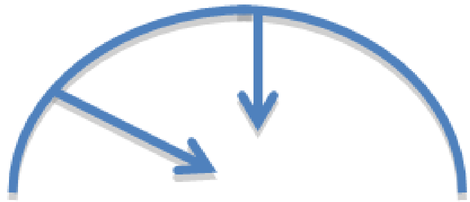
$E(r) = 1/(4\pi\varepsilon_0)[2.300.q]$

$E(r) = (2.300).(5\mathrm{x}10^{-9})/[4.(3{,}1416).(8{,}854\mathrm{x}10^{-12})]$

$E(r) = (2.300).(5)\mathrm{x}10^{3}/[4.(3{,}1416).(8{,}854)]$

$E(r) = 103.359{,}03$ N/C oppure V/m

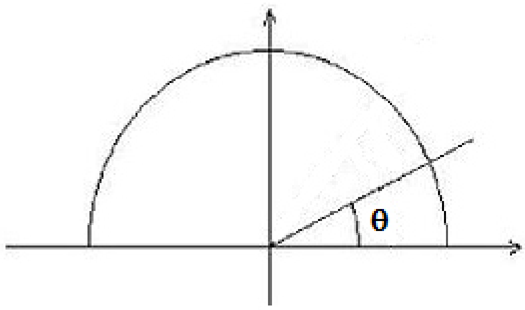
2. (**Esame Settembre 2014**) Un'asta molto sottile, uniformemente carica, ha forma semicircolare di raggio **r**. Trovate il valore del campo elettrico nel punto in mezzo alla congiungente i due estremi dell'asta.



Soluzione:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}.$$

Disponendo l’asta a forma di semicerchio in un sistema di riferimento con l’origine nel punto in cui si vuole calcolare il campo e con l’asse x orientato in modo da giacere sulla congiungente i due estremi, notiamo che le componenti lungo x del campo si annullano a vicenda, mentre le componenti lungo l’asse y si sommano. Se supponiamo che sia Q il valore totale della carica dell’asta.



$dE_y = 1/(4\pi\varepsilon_0)[dq/r^2].\cos(\theta)$

Ma dobbiamo vedere la dipendenza di θ e di dq:

Dalla densità lineare di carica $\lambda = Q/d$ (carica/distanza):

$dq = \lambda dl = \lambda r d\theta$, con $\lambda = Q/\pi r$ → $dq = Q.d\theta/\pi$

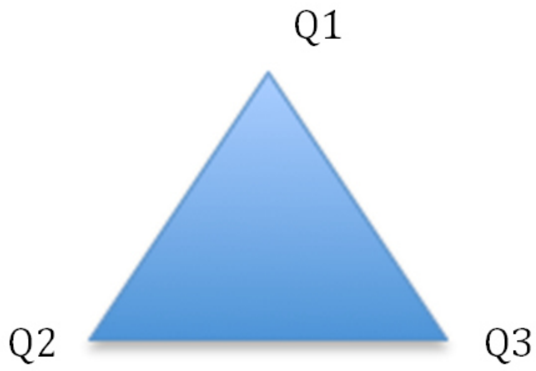
$E_y = 1/(4\pi\varepsilon_0 r^2).Q/\pi \int_0^{\pi} [\cos(\theta)d\theta]$

$E_y = Q/(2\pi^2\varepsilon_0 r^2) \int_0^{\pi/2} [\cos(\theta)d\theta]$

$E_y = Q/(2\pi^2\varepsilon_0 r^2).[\sin(\pi/2) - \sin(0)]$

$E_y = Q/(2\pi^2\varepsilon_0 r^2)$

3. (**Esame Luglio 2014**) Tre cariche sono fissate ai vertici di un triangolo equilatero di lato d=12cm.
Qual è l'energia potenziale elettrica del sistema di cariche se: q1=+q, q2=-4q e q3=+2q con q=150nC.



Soluzione:

Forza elettrostatica $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$

Energia potenziale elettrica:

$$U_\varepsilon(\mathbf{r}) = -W_{\mathbf{r_0}\to\mathbf{r}} = -\int_{\mathbf{r_0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = qV(\mathbf{r})$$

Per due cariche puntuali a una distanza r_{12}

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

Quindi l'energia potenziale elettrica del sistema sarà:

$U_e = -W_{12} - W_{23} - W_{31}$

$U_e = -(Q_1.Q_2/4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2) - (Q_2.Q_3/4\pi\varepsilon_0 r_{23}^2) - (Q_3.Q_1/4\pi\varepsilon_0 r_{31}^2)$

$r_{12} = r_{23} = r_{31} = d$

$U_e = -(1/4\pi\varepsilon_0 d^2).(Q_1.Q_2 + Q_2.Q_3 + Q_3.Q_1)$

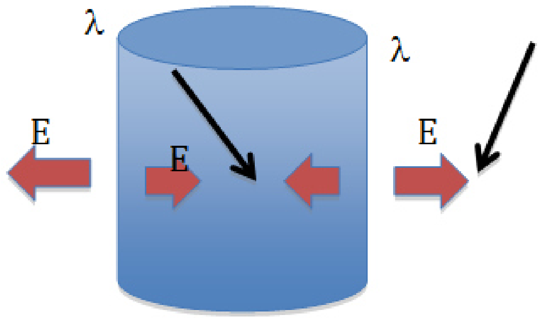
$U_e = -(1/4\pi\varepsilon_0 d^2).(-4q^2 - 8q^2 + 2q^2)$

$U_e = 10q^2/4\pi\varepsilon_0 d^2$

$U_e = 10.(150\mathrm{x}10^{-9})^2/[4.(3{,}1416).(8{,}854\mathrm{x}10^{-12}).(0{,}12)^2]$

$U_e = 14043{,}35 \mathrm{~x~} 10^{-5} = 0{,}14$ J

4. (**Esame Settembre 2014**) Trovare il campo elettrico dentro e fuori al cilindro composto da un metallo sottile carico positivamente con una densità di carica lineare $\lambda=2x10^{-8}$ C/m e **r**=0,03 m.



Soluzione:

Il teorema di Gauss afferma che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa dipende solo dalle cariche qint interne alla superficie ed è pari a q_{int}/ε_0:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Quindi nel nostro caso, dentro il cilindro su una qualsiasi superficie che stia dentro il cilindro avremo $q_{int} = 0$.

$|E|.|S|.\cos(\theta) = 0 \rightarrow E = 0$

Fuori il cilindro avremo, visto che la densità di carica lineare è $\lambda=2x10^{-8}$ C/m e che $\lambda= Q/d$ allora (dove d è l'altezza del cilindro):

$|E|.|S|.\cos(\theta) = \lambda.d/\varepsilon_0$

La superficie del cilindro è $2\pi r.d$

Quindi, considerando il campo elettrico più grande cioè quando $\cos(\theta) = 1$:

$E.2\pi r.d = \lambda.d/\varepsilon_0$

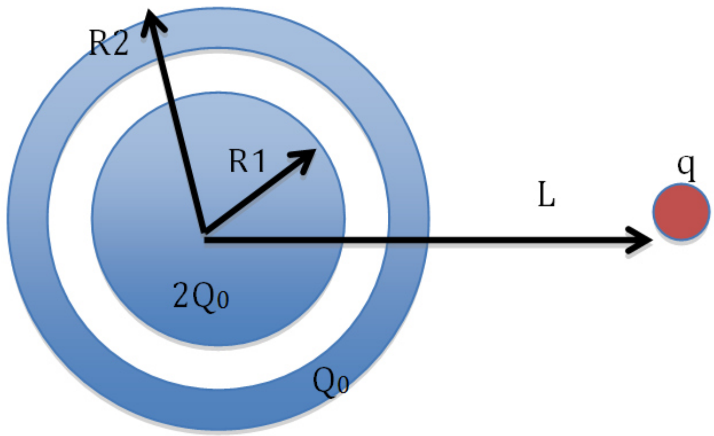
$E = \lambda/2\pi r\varepsilon_0$

$E = 2x10^{-8}/[2.(3,1416)x(0,03)x(8,854x10^{-12})]$

$E = 1,1984x10^4$

E = 11.984 V/m oppure N/C

5. (**Esame Giugno 2014**) Un conduttore sferico cavo di raggio R_2=2 cm ha una carica pari a $Q_0=3*10^{-4}$ C. All'interno della sfera cava c'è un altro conduttore sferico di raggio R_1=1 cm, con una carica pari a $2Q_0$. Ad una distanza L=3m dal centro dei conduttori è posta una piccola carica puntiforme $q=-2*10^{-7}$ C.
   a) Calcolare la forza esercitata sulla carica q
   b) La carica q è portata all'infinito, quale è stato il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche?
   c) E se la carica fosse nella cavità, tra la sfera più grande e quella più piccola quale sarebbe la forza esercitata su q?



Soluzione:

La distanza tra q ed i conduttori è grande rispetto al loro diametro, e q è piccola rispetto a Q_0. L'effetto di induzione elettrostatica è perciò trascurabile e le distribuzioni di carica sui conduttori possono considerarsi in buona approssimazione sferiche uniformi. La carica q vedrà il campo generato da una superficie sferica carica con carica $3Q_0$, equivalente a quello di una carica puntiforme.

a) La forza elettrostatica tra due cariche è data da:
   $F = q.E = k.Q_1.Q_2/r^2$ con $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$

   Nel nostro caso
   $F = 1/(4\pi\varepsilon_0).[q.3Q_0/(L+R_2)^2]$
   $F = 1/(4\pi\varepsilon_0).[(-2x10^{-7}).3(3x10^{-4})/(3,02)^2]$
   $F = 1/(4\pi\varepsilon_0).[(-2x10^{-7}).3(3x10^{-4})/(3,02)^2]$
   $F = -0,4934x10^{-11}/\pi\varepsilon_0$
   $F = -0,1774$ N
b) Lavoro forze elettrostatiche:

$$W_{\mathbf{r_0}\rightarrow\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r_0}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = qV(\mathbf{r})$$

Quindi:

$W = \int_3^{\infty} [k.(q).(3Q_0)/r^2]dr$

$W = 3Q_0.q/(4\pi\varepsilon_0).\int_3^{\infty} [1/r^2].dr$

$W = 3Q_0.q/(4\pi\varepsilon_0).[-1/\infty - (-1/3)]$

$W = Q_0.q/(4\pi\varepsilon_0)$

$W = (3x10^{-4}).(-2x10^{-7})/(4\pi\varepsilon_0) = -60x10^{-12}/(4\pi\varepsilon_0)$

$W = (-60)/[4.(3,1416).(8,854)]$

$W = -0,54$ J

c) Se la carica q fosse nella cavità, per il teorema di gauss, la carica che influisce è solo quella interna alla superficie, quindi:

$F = q.E = k.Q_1.Q_2/r^2$ con $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$

$F = 1/(4\pi\varepsilon_0).[q.2Q_0/(R_1)^2]$

$F = q.Q_0/(2\pi\varepsilon_0 R_1{}^2)$

$F = (-2x10^{-7}).(3x10^{-4})/[2\pi\varepsilon_0.(0,01)^2]$

$F = -3x10^{-11}/[(3,1416).(8,854x10^{-12}).(0,01)^2]$

$F = -10.785,3$ N