Dinamica dei sistemi di punti materiali.

Obiettivo: l'estensione delle leggi e dei principi della Dinamica del punto materiale ai sistemi di particelle.

NB: Abbiamo visto che per il punto materiale:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_R = \sum_1{}^k{}_i \, \mathbf{F}_i$$

$$E_k = ½mv^2, \qquad \Delta E_{k,A,B} = W_{A,B}$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \qquad d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_R$$

Generalizzazione dei risultati relativi alla dinamica di una particella ai sistemi con un numero finito N di punti in termini delle <u>grandezze dinamiche collettive</u> del sistema di particelle.

Sistema discreto: $S = \{ m_i, i = 1 \ldots N\}$

Massa totale di un sistema di particelle $M_S = \sum_1{}^N{}_i \, m_i$ (S discreto)

Grandezze dinamiche collettive = riferite a tutto S:

$$\mathbf{P}_S = \sum_1{}^N{}_i \, \mathbf{p}_i = \sum_1{}^N{}_i \, (m_i \, \mathbf{v}_i)$$

$$E_{k,S} = \sum_1{}^N{}_i \, E_{k,i} = \sum_1{}^N{}_i \, ½m_i v_i^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1{}^N{}_i \, L_{O,i} = \sum_1{}^N{}_i \, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i$$

Analogamente al caso del punto materiale, cercheremo di dare un senso alle relazioni seguenti:

$$d\mathbf{Ps}/dt = \mathbf{?}$$

$$\Delta E_{k,S} = ?$$

$$d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{?}$$

Quindi, usando le grandezze collettive di cui sopra si otterrà una descrizione del moto del sistema nel suo insieme, piuttosto che del moto delle singole particelle che formano il sistema.

Per capire cosa succede partiamo dall'equazione del moto della particella i-ma di S in un sistema di riferimento inerziale Oxyz,t:

Equazione del moto della particella i–ma (*legge di Newton*):

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} \qquad (1)$$

Forza risultante $\mathbf{F}_i^{(R)}$ agente sulla particella i–ma come somma delle forze interne $\mathbf{F}_i^{(I)}$ e delle forze esterne $\mathbf{F}_i^{(E)}$ al sistema S.

Forze esterne e forze interne: $F_i^{(R)} = F_i^{(I)} + F_i^{(E)}$,

$$\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1{}^N{}_j\, \mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} \qquad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji},]$$

$$\mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_1{}^R{}_k\, \mathbf{F}^{(e)}{}_{ik} \qquad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki},]$$

Vale il principio di azione/reazione, per cui per ogni coppia di particelle appartenenti al sistema si avrà $\mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = -\mathbf{F}^{(i)}{}_{ji}$.

In generale, l'equazione del moto della singola particella i–ma è un'equazione differenziale che dipende da ($N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t$) variabili:

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}i^{(I)} = \mathbf{F}^{(E)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) + \mathbf{F}^{(I)}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, t)$$

E quindi per un sistema di N particelle si ottiene un sistema di N equazioni vettoriali di Newton, che danno origine a 3N equazioni scalari di Newton in 6N+1 incognite ($N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t$).

Impossibilità di risolvere sistemi di 3N equazioni di Newton in 6N+1 incognite ($N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t$). Il problema è senza soluzione perché indeterminato.

Cosa si può fare con i sistemi di punti materiali?
Cosa si sa fare con i sistemi di punti materiali?

Cercare di ottenere una descrizione del moto del sistema in termini delle grandezze dinamiche collettive di cui sopra. In tale modo, come già anticipato si otterrà una descrizione del moto del sistema nel suo insieme, piuttosto che delle singole particelle.

E dato che il moto è dovuto all'azione combinata di tutte le forze agenti, la prima grandezza collettiva da definire è sicuramente la risultante di tutte le forze, interne ed esterne, agenti su tutte le particelle del sistema:

$$\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i \,[\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)}$$

Calcolo della risultante di tutte le forze, interne ed esterne, agenti sul sistema S, a partire dall'equazione del moto (1):

Infatti da:

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} \qquad (1),$$

sommando sulle N-particelle del sistema si ottiene:

$$\sum_1^N{}_i m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] =$$

$$\sum_1^N{}_i m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)}$$

Ma a causa del principio di azione–reazione ($\mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = -\,\mathbf{F}^{(i)}{}_{ji}$) si avrà che $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$ Infatti: $\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_i [\sum_1^N{}_j \mathbf{F}_{ij}] = \sum_1^N{}_{ij\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij} = 0$.

In conclusione sarà:

$$\sum_1^N{}_i m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)} \qquad (2)$$

Per un sistema di due particelle: $\mathbf{F}_{21} = -\,\mathbf{F}_{12}$ si ha infatti:

$$\sum_1^2{}_{ij\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} + (-\,\mathbf{F}_{12}) = \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

Per un sistema di tre particelle: $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$ si ha infatti:
$\sum_1^3{}_{ij\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + (-\mathbf{F}_{12}) + \mathbf{F}_{23} + (-\mathbf{F}_{13}) + (-F_{23}) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{23} = \mathbf{0}$.

E così via per N = 4, 5, 6, ….

In definitiva la risultante di tutte le forze agenti sul sistema:

$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)}$

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

La risultante delle forse esterne che agiscono su un sistema di particelle è formalmente identica ($\mathbf{F}_S^{(R)}$) alla risultante di un sistema di forze agenti su una particella, per cui vale la legge di Newton. E’ pensabile di trattare il sistema S come una super particella per cui si possa scrivere l’equivalente della II legge della dinamica che abbiamo derivato per il punto materiale ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}_R$)?

Per la massa del sistema non c’è problema: $M_S = \sum_1^N{}_i\, m_i$.

Per l’accelerazione a bisogna fare riferimento all’accelerazione $\mathbf{a}_S$ del sistema data, come vedremo fra un po’, dalla media ponderata delle accelerazioni delle singole particelle

Centro di massa di un sistema di particelle.

Definizione e proprietà: Posizione del CM

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\; m_i\, \mathbf{r}_i / \sum_1^N{}_i\; m_i$$

In pratica, per i sistemi discreti: $M_S\, \mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\; m_i\, \mathbf{r}_i$.

In termini di componenti cartesiane sarà:

$$x_{CM} = \sum_1^N{}_i\; m_i\, x_i / \sum_1^N{}_i\, m_i$$

$$y_{CM} = \sum_1^N{}_i \; m_i\, y_i / \sum_1^N{}_i\, m_i$$

$$z_{CM} = \sum_1^N{}_i \; m_i\, z_i / \sum_1^N{}_i\, m_i$$

N.B. Il CM è una proprietà intrinseca del sistema. La sua posizione quindi è indipendente da Oxyz, mentre le sue coordinate dipendono dalla scelta del sistema Oxyz:

Esempio: Caso di due particelle a distanza *d* l'uno dall'altra:

Sistema $O'x'$ tale che m_1 si trovi in O' e m_2 in $x_2 = 0 + d$

$$x'_{CM} = [m_1\, 0 + m_2\, d] / [m_1 + m_2] = m_2\, d/[m_1 + m_2]$$

Sistema Ox tale che m_1 si trovi in x_1 e m_2 in $x_2 = x_1 + d$:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= [m_1\, x_1 + m_2\, x_2] / [m_1 + m_2] = \\ &= [m_1\, x_1 + m_2\, (x_1 + d)] / [m_1 + m_2] = \\ &= x_1 + m_2\, d/(m_1+m_2) = \\ &= x_1 + x'_{CM} \end{aligned}$$

E quindi in notazione vettoriale: $\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{\mathbf{O}'} + \mathbf{r}'_{CM}$

Proprietà distributiva del CM:

Caso di due sistemi $S = \{m_i,\ i = 1 \ldots N_1\}$ e $S' = \{ m_j,\ j = 1 \ldots N_2\}$

Il centro di massa di due sistemi di particelle $S = \{m_i,\ i = 1 \ldots N_1\}$ e $S' = \{ m_j,\ j = 1 \ldots N_2\}$ corrisponde al CM di due particelle aventi massa uguale alle masse totali $M_1 = \sum_1^{N1}{}_i\, m_i$ e $M_2 = \sum_1^{N2}{}_k\, m_i$ dei due sistemi e poste nel centro di massa di ciascun sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{CM} &= \sum_1^{N1+N2}{}_i\, m_i\, \mathbf{r}_i / \sum_1^{N1+N2}{}_i\, m_i \\ &= [\sum_1^{N1}{}_j\, m_j\, \mathbf{r}_j + \sum_1^{N2}{}_k\, m_k\, \mathbf{r}_k]/[\sum_1^{N1}{}_j\, m_j + \sum_1^{N2}{}_k\, m_k] = \\ &= [M_1\, \mathbf{r}_{CM,1} + M_2\, \mathbf{r}_{CM,2}]/[M_1 + M_2] \end{aligned}$$

Velocità e accelerazione del CM:

1) $\mathbf{v}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{v}_i / \sum_1^N{}_i\ m_i$ $\quad (v_{X,CM} = \sum_i m_i v_{xi} / \sum_i m_i$, etc.)

2) $\mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{a}_i / \sum_1^N{}_i\ m_i$ $\quad (a_{X,CM} = \sum_i m_i a_{xi} / \sum_i m_i$, etc.)

In alternativa $\mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{a}_{CM}$ si ottengono da M $\mathbf{r}_{CM} = \sum_i m_i\ \mathbf{r}_i$:

1') M $\mathbf{v}_{C\,M} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{v}_i$ direttamente da M d$\mathbf{r}_{CM}$/dt $= \sum_i m_i\ (d\mathbf{r}_i/dt)$

2') M $\mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{a}_i$ direttamente da M d$\mathbf{v}_{CM}$/dt $= \sum_i m_i\ (d\mathbf{v}_i/dt)$

Pertanto quella che abbiamo chiamato l'accelerazione di S $\mathbf{a}_S$ non è altro che la media ponderata $\mathbf{a}_{CM}$ delle accelerazioni $\mathbf{a}_i$ delle singole particelle:

$$\mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, m_i\ \mathbf{a}_i \,/\, \sum_1^N{}_i\, m_i$$

E quindi per un Sistema di particelle, dato che $\sum_1^N{}_i = M_S$, si avrà:

$$M\ \mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_S^{(R)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

La relazione costituisce la I legge cardinale della dinamica dei sistemi di particelle (che sono sistemi discreti di punti materiali).

Essa è formalmente la legge di Newton di una super-particella avente la massa totale M_S del sistema S che si muove con l'accelerazione $\mathbf{a}_{CM}$ del centro di massa del sistema S essendo soggetta all'azione della risultante $\mathbf{F}_S^{(R)}$ della forze ottenuta sommando tra di loro le sole forze esterne agenti sulle particelle del sistema S di punti materiali.

Centro di massa di sistemi continui.

Definizione di sistema continuo:

$$S = \int_M dm = \int_V \rho(r)dV, \text{ essendo } \rho(r) = dm/dV$$

Massa totale del sistema continuo $M_S = \int_V \rho(r)dV$

Definizione: Vettore posizione del CM di un sistema continuo:

$$\mathbf{r}_{CM} = =\int_M \mathbf{r}\ dm \ / \int_M dm$$

In pratica: $M_S\ \mathbf{r}_{CM} = \int_M \mathbf{r}\ dm$, dove $M_S = \int_M dm$

In termini di densità di massa $\rho(r)$, dato che $dm = \rho(r)dV$, si avrà che il vettore posizione del centro di massa di un sistema continuo:

$$\mathbf{r}_{CM} = \int_V \mathbf{r}\ \rho(r)\ dV \ / \int_V \rho(r)\ dV$$

Nel caso di un sistema omogeneo, per il, quale $\rho(r) = \rho_O$, si avrà:

$$\mathbf{r}_{CM} = \rho_O \int_V \mathbf{r}dV \ / \ [\rho_O \int_V dV] = \int_V \mathbf{r}dV \ / \int_V dV$$

che corrisponde al calcolo del baricentro della figura geometrica.

In conclusione: il CM di un sistema continuo e omogeneo avente forma geometrica regolare coincide con il baricentro della figura.

N.B.: Utilità della proprietà distributiva nel calcolo del CM di un sistema continuo formato da due figure geometriche regolari.

Le componenti cartesiane del vettore $\mathbf{r}_{CM}$ di un sistema continuo:

$$x_{CM} = \int_V x dV \ / \int_V dV$$

$$y_{CM} = \int_V \mathbf{r}dV \ / \int_V dV$$

$$z_{CM} = \int_V \mathbf{r}dV \ / \int_V dV$$

Calcolo del centro di massa di alcuni sistemi discreti e continui:

Esempi di calcolo: semi–disco, semi–sfera e semi–anello.

Semi–disco: $y_{CM} = 4R/3\pi$;

Semi–sfera: $z_{CM} = 3R/8$;

Semi–anello: $y_{CM} = 2R/\pi$;

Guscio semi–sferico: $z_{CM} = R/3$;

Cono: $z_{CM} = h/4$ (distanza misurata dalla base).

Precisazione sulla I Legge Cardinale della dinamica dei sistemi:

$$M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

Come si ricavata questa legge?

I passo: Si è partiti dalla legge di Newton

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} \qquad (1),$$

e sommando sulle N-particelle del sistema si è ottenuto:

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i\, [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \mathbf{F}\mathrm{s}^{(R)}$$

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}\mathrm{s}^{(R)}$$

II passo: Sfruttando il principio di azione–reazione ($\mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = -\,\mathbf{F}^{(i)}{}_{ji}$) si era visto che $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$, per cui $\mathbf{F}\mathrm{s}^{(R)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$.

Infatti: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_i\, [\sum_1^N{}_{j\,(j\neq i)}\mathbf{F}^{(i)}{}_{ij}] = \sum_1^N{}_{ij\,(j\neq i)}\mathbf{F}^{(i)}{}_{ij} = 0$.

III passo: In conclusione si era arrivati a scrivere:

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}^{(EXT)} \qquad (2)$$

D’altra parte, partendo dalla definizione di CM del sistema S, si è ricavato per derivazione successiva l’accelerazione del CM del sistema:

$$\mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i \; m_i \, \mathbf{a}_i / \sum_1^N{}_i \; m_i$$

da cui, dato che $M_S = \sum_1^N{}_i \; m_i$, si è ottenuto: $M_S \, \mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i \; m_i \, \mathbf{a}_i$

Infine, ricordando che $\mathbf{F}s^{(R)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, la (2), diventa:

$$M_S \, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

<u>Applicazioni della I Legge cardinale della dinamica dei sistemi</u>.

In virtù delle proprietà del CM del sistema, la legge $M_S \, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}_S^{(R)}$ può essere espressa come:

$$d\mathbf{P}_S / dt = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

<u>Sistema isolato:</u> (non agiscono forze esterne: $\Rightarrow$ $\mathbf{F}^{(e)}_{ik} = 0$)

$\Rightarrow$ $\mathbf{F}^{(EXT)}=0$. E dato che $\mathbf{F}^{(INT)}=0$, si avrà anche $\mathbf{F}_S^{(R)} = 0$, da cui

$$d\mathbf{P}_S / dt = \mathbf{0}$$

e quindi:

$$\mathbf{P}_S = \text{costante}$$

<u>N.B.: La conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle isolato è un fatto sperimentale, mai violato in natura</u>.

Conseguenze: Conservazione della quantità di moto di un sistema

$\mathbf{P}_S$ = costante $\Rightarrow$ $\mathbf{P}_S = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{CM}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{v}_{CM}$ = costante

La conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato (sul quale non agiscono forze esterne) implica che il centro di massa del sistema si muove come una particella libera:

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{costante.}$$

Esempio di conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle libero dall'azione di forze esterne:

Sistema astronauta-navicella spaziale che galleggia liberamente nel vuoto si muove di moto rettilineo uniforme con $\mathbf{v}_{CM}$ costante:

$$\mathbf{P}s = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{costante.}$$

$$d\mathbf{p}_1/dt + d\mathbf{p}_2/dt = 0 \qquad \Rightarrow \mathbf{F}^{(i)}_{12} = -\,\mathbf{F}^{(i)}_{21} \quad \Rightarrow \text{Principio A/R}$$

N.B.: Precisazione relativa alla definizione di sistema isolato:
– quando tutte le forse esterne sono nulle (cioè: $\mathbf{F}_{ik} = \mathbf{0}$),
– quando la risultante delle forse esterne agenti sulla singola particella è nulla ($\mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$), il sistema si comporta come se fosse isolato.

Esempio di sistema che si comportano come se fosse isolato:
– granata appoggiata a un piano orizzontale che esplode e genera una serie di frammenti <u>sparati</u> in varie direzioni;

<u>Caso particolarmente interessante per le applicazioni</u>: quello in cui una componente della quantità di moto totale $\mathbf{P}_S$ si conserva!

Quando le forze esterne non agiscono lungo la direzione x si ha la conservazione della componente $P_{S,X}$ della quantità di moto totale del sistema di punti materiali, quindi si può scrivere:

$$P_{S,X} = Mv_{CM,X} = \text{costante!}$$

In tali casi si ha la conservazione della componente $v_{CM,X}$ della velocità del centro di massa del sistema.

I casi in cui si conserva una sola componente:
– rinculo di un cannone di massa M appoggiato al suolo durante lo sparo in direzione orizzontale di un proiettile di massa m;

- moto di massa m che si sposta con velocità relativa **v'** su un carrello di massa M appoggiato su un piano orizzontale liscio:
  a) con sistema inizialmente in quiete, i.e. $\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$;
  b) con sistema inizialmente in moto con $\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{V}_0$;
- moto di un insetto di massa m che si muove partendo da un'estremità con velocità assoluta **v** lungo un'asta di massa M e lunghezza L, appoggiata a un piano orizzontale liscio, con calcolo del tempo impiegato a raggiungere l'altra estremità;
- moto di un corpo di massa m su un cuneo (piano inclinato o profilo circolare) di massa M appoggiato a un piano orizzontale liscio: $(M+m)\,0 = m\,v_x + M\,V_x$;
- moto di due corpi di massa m_1 e m_2 appoggiati ai capi di una molla compressa che viene improvvisamente fatta espandere.

Sistema di punti materiali non–isolato: $\mathbf{F}_{ik} \neq 0 \quad \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} \neq 0$

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{non è costante, ma varia nel tempo: } \mathbf{P}_S(t)$$

Relazione la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema e la risultante delle forze agenti sulle particelle dei sistema.

$$d\mathbf{P}_S/dt = d(\sum_i \mathbf{p}_i)/dt = \sum_i (d\mathbf{p}_i/dt) = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^{(R)}$$

$$= \sum_{1}^{N}{}_i\,[\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

essendo $F^{(INT)} = 0$ per il principio di azione–reazione.

Quindi: $$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)}$$

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi in un sistema di riferimento inerziale Oxyz,t detto anche sistema del laboratorio (sistema L).

Tale legge si può anche scrivere come: $M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, nota anche come teorema del centro di massa del sistema, dato che dalla (2):

$$\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} \quad \text{o equivalentemente} \quad \Rightarrow \quad M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

Esiste una seconda legge cardinale) della dinamica di sistemi di particelle che correla la derivata del momento della quantità di moto totale del sistema S, rispetto al polo O, origine del sistema di riferimento di laboratorio (sistema L), al momento delle forze esterne riferito al medesimo polo O:

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = d(\sum_1^N{}_i\,\mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i\,\boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

Si tratta di fatto il teorema del momento della quantità di moto scritto per un sistema di punti materiali che viene impropriamente chiamata Legge di Newton per il moto rotazionale del sistema.

1) Sistema isolato: Analogamente a quanto accade per un punto materiale libero il cui momento della quantità di moto si conserva nel tempo, nel caso di un sistema di particelle solato, cioè non soggetto all'azione di alcuna forza esterna, il momento angolare totale del sistema $\mathbf{L}_{O,S}$ si conserva nel tempo:

$$\mathbf{L}_{O,S} = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i\,\mathbf{L}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i = \text{costante!}$$

N.B.: Anche la conservazione del momento della quantità di moto di un sistema di particelle isolato è un fatto sperimentalmente verificato, mai violato in natura.

In tal caso, il teorema del momento angolare dà $d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \mathbf{0}$.

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, d\mathbf{L}_{O,i}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

ma non essendoci forze esterne $\mathbf{F}_{ik} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$, si avrà pure:

$$\mathbf{0} = d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{O}i}^{(I)} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistema isolato: risultante dei momenti delle forze interne = **0**,

$$\sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$$

Verifica della relazione per un sistema di due particelle:

$$\sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} = \tfrac{1}{2}[\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21}] = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$$

mentre, per un sistema di tre particelle si avrà:

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{32} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{13} + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{23} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} = \tfrac{1}{2}[\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{31} \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_{32} \wedge \mathbf{F}_{32}] = \tfrac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

Principio di azione–reazione per i sistemi di punti materiali:

Le due leggi cardinali della dinamica sanciscono che, indipendentemente dal fatto che il sistema S sia isolato oppure no, la risultante delle forze interne $\mathbf{F}^{(INT)} = 0$ e il momento risultante dei momenti delle forze interne $\boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} = 0$. Cioè:

$$\mathbf{F}^{(INT)} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)} = 0; \qquad \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} = \sum_1^N{}_i\, \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = 0).$$

2) Se il sistema non è isolato allora $d\mathbf{L}_{OS}/dt \neq \mathbf{0}$, e si ha che:

$$d\mathbf{L}_O/dt = d\left(\sum_1^N{}_i\, \mathbf{L}_{O,i}\right)/dt = = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

$$= \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} + \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

essendo, come abbiamo visto $\sum_1^N{}_i\, \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \mathbf{0}$.

$$d\mathbf{L}_O /dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

Applicazioni delle leggi della dinamica dei sistemi a casi di equilibrio roto-traslazionale: la condizione di equilibrio roto-traslazione di un sistema impone che: $\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$ e $\sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \mathbf{0}$

Esercizi sulla dinamica di sistemi variamente vincolati a muoversi nel piano verticale attorno ad un asse orizzontale fisso passante per un punto O, non coincidente con il CM del sistema.

– Caso del bi-pendolo rigido ancorato ad un punto O e tenuto in equilibrio roto-traslazionale da una fune tirata lateralmente;
– Caso del manubrio simmetrico e asimmetrico vincolato ad un asse verticale passante per un punto fisso O diverso dal CM.

Abbiamo enunciato la II legge della dinamica dei sistemi di particelle riferendoci al polo O origine del sistema di riferimento Oxyz,t che coincide con il sistema del laboratorio (Sitema L).

Cosa succede della II legge Cardinale della dinamica dei sistemi nel caso in cui si assumesse un polo O' diverso da O,
E se tale polo O' coincidesse con il CM del sistema?
Il teorema del momento angolare vale anche in questo caso?

Nel caso di un polo O' diverso da O il teorema del momento della quantità di moto diventa:

$$d\mathbf{L}_{O',S}/dt = d(\sum_1^N{}_i\mathbf{L}_{O',i})/dt = \sum_1^N{}_i d(\mathbf{r'}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i)/dt$$

$$= \sum_1^N{}_i (\mathbf{v'}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i + \mathbf{r'}_i \wedge m_i\, \mathbf{a}_i) = \sum_1^N{}_i[(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{O'}) \wedge m_i\mathbf{v}_i + \mathbf{r'}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

$$= \sum_1^N{}_i[\mathbf{v}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i] - [\mathbf{v}_{O'} \wedge (\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{v}_i)] + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(E)}$$

$$= \mathbf{0} - \mathbf{v}_{O'} \wedge M_S\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{0} + \sum_1^N{}_i\ \boldsymbol{\tau}_{O',i}^{(E)}$$

Assumendo come polo O' si ha quindi:

$$d\mathbf{L}_{O',S}/dt = -\,\mathbf{v}_{O'}\wedge M_S\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\ \boldsymbol{\tau}_{O',i}^{(E)}$$

per cui se O' è un punto fisso ($\mathbf{v}_{O'} = 0$):

$$d\mathbf{L}_{O',S}/dt = \sum_1^N{}_i\ \boldsymbol{\tau}_{O',i}^{(E)}$$

vale ancora il teorema del momento angolare; mentre se NON è un punto fisso il teorema del momento angolare NON vale!

Ma se O' coincidesse con il CM allora avremmo:

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = -\,\mathbf{v}_{CM}\wedge M_S\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\ \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)}$$

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i\ \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)}$$

e quindi nel caso in cui come polo si assuma il CM del sistema, teorema del momento angolare vale, anche se il CM NON è fisso.

Sistema L: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

Ia Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a:

$$M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

IIa legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = d(\sum_1^N{}_i\,\mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i\ \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = d(\sum_1^N{}_i\,\mathbf{L}_{CM,i})/dt = \sum_1^N{}_i\ \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}.$$

Le leggi ricavate più sopra valgono nel sistema Oxyz,t (L).

NB: La seconda legge vale, come abbiamo visto prima, anche se come polo di riferimento si assume il CM del sistema di particelle:

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = d(\sum_1{}^N{}_i \mathbf{L}_{CM,i})/dt = \sum_1{}^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}{}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}{}^{(EXT)}.$$

Questo risultato, insieme alla I legge cardinale:

$$M\,\mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i\,\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_S{}^{(R)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

spiega l'importanza di aver introdotto il concetto di centro di massa, con le relative proprietà.

Sistema C: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi

Sistema C è il sistema di riferimento del centro di massa.

Si tratta di un sistema CMxyz, ancorato al CM del sistema S e avente gli assi paralleli agli assi x,y,z di Oxyz.

Il sistema C è un sistema di riferimento in cui alcune delle grandezze cinematiche dinamiche collettive del sistema di PM risultano = 0.

Calcolo della quantità: $\mathbf{r}'_{CM} \Rightarrow \sum_i\ m_i\,\mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{v}'_{CM} \Rightarrow \sum_i\ m_i\,\mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{a}'_{CM} \Rightarrow \sum_i\ m_i\,\mathbf{a}'_i = M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$.

Calcolo delle grandezze dinamiche: $\mathbf{P}'_S$, $E'_{S,k}$ e $\mathbf{L}'_{CM}$.

$$\mathbf{P}'_S = \sum_1{}^N{}_i\,\mathbf{p}'_i = \sum_1{}^N{}_i\ m_i\,\mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0};$$

$$E'_{k,S} = \sum_1{}^N{}_i\ E'_{k,i} = ½ \sum_1{}^N{}_i\, m_i\, v'_i{}^2 = ½ \sum_1{}^N{}_i\,(p'_i{}^2/m_i)$$

$$\mathbf{L}'_{CM,S} = \sum_1{}^N{}_i\,\mathbf{L}'_{CM,i} = \sum_1{}^N{}_i\,\mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}'_i$$

Sistema C = sistema di riferimento a quantità di moto totale nulla:

$\mathbf{P'}_S = 0$ (con dimostrazione).

Leggi cardinali della dinamica nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a'}_{CM} = 0$, ma …

$$d\mathbf{P'}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L'}_{CM,S}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}$.

N.B.: Vale il teorema del momento angolare rispetto al CM assunto come polo (anche se CM è in moto non uniforme).

Riassumendo: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

Sistema L:

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)}; \quad \text{equivalente a:} \quad M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_O/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Sistema C:

I^a legge cardinale: $M\mathbf{a'}_{CM} = 0$, ma …

$$d\mathbf{P'}_S/dt = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II^a legge cardinale:

$$d\mathbf{L'}_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}.$$

Resta da vedere cosa succede dell'energia (vedi più sotto).

Definizioni di Energia cinetica di un sistema S:

$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i\ E_{k,i} = \sum_1^N{}_i\ ½\, m_i\, v_i^2$. (nel sistema L, ancorato in O)

$E'_{k,S} = \sum_1^N{}_i\ E'_{k,i} = \sum_1^N{}_i\ ½\, m_i\, v'^2_i$ (nel sistema C, ancorato a CM)

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}^{INT}$

Teoremi di Konig: Relazioni fra le grandezze dinamiche collettive (quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica) calcolate nel sistema L e nel sistema C:

Teorema di Konig della quantità di moto, del momento della quantità di moto, e dell'energia cinetica.

– quantità di moto: $\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P}'_S = M\mathbf{v}_{CM}$.

N.B.: Dimostrazione:

$\mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i\ m_i\mathbf{v}_i = \sum_1^N{}_i\ m_i(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) = (\sum_1^N{}_i\ m_i)\ \mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i m_i\mathbf{v}'_i$

Ma siccome $\mathbf{P}'_S = \sum_1^N{}_i m_i\mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$, sarà: $\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM}$

– momento angolare: $\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

N.B.: Dimostrazione:

$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i = \sum_1^N{}_i\ (\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}'_i) \wedge m_i(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}'_i + \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_1^N{}_i\ m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\ \mathbf{L}'_{CM,i} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

dato che: $\sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}_{CM} = (\sum_1^N{}_i\ m_i\mathbf{r}'_i)\wedge\mathbf{v}_{CM} = 0$ e così pure: $\sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_1^N{}_i\ m_i\mathbf{v}'_i) = 0$.

–dell'energia cinetica: $E_{k,S} = ½ Mv_{CM}^2 + E'_{k,S} = E_{k,CM} + E_{k,INT}$

Dimostrazione:

$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i E_{k,i} = ½ \sum_1^N{}_i\ m_i v_i^2 = ½ \sum_1^N{}_i\ m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = ½ \sum_1^N{}_i\ m_i (\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i)\cdot(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) = ½ \sum_1^N{}_i\ m_i\ v_{CM}^2 + ½ \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} + ½\ \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_{CM} + ½ \sum_1^N{}_i\ m_i\ v'^2_i$

Ed essendo $\sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$, si avrà:

$$E_{k,S} = ½ Mv_{CM}^2 + E'_{k,S}$$

Teoremi di Konig: Scomposizione del moto in moto orbitale e moto intrinseco o interno.

Esempi: moto della luna attorno alla terra = moto orbitale di un punto materiale di massa M con velocità v_{CM} + moto intrinseco, proprio del sistema e indipendente dal sistema di riferimento usato per l'osservazione.

Teorema dell’energia cinetica per i sistemi di particelle:

Lavoro delle forze agenti su un sistema di particelle:

Lavoro delle forze interne ($dW^{INT} = \sum_1^N{}_i\ dW^{(I)}_i = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{F}_i^{(I)} \cdot d\mathbf{r}_i$) e lavoro delle forze esterne ($dW^{EXT} = \sum_1^N{}_i\ dW^{(E)}_i = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{F}_i^{(E)} \cdot d\mathbf{r}_i$).

Il teorema dell’energia di un sistema di particelle:

$$dE_{k,S} = dW^{INT} + dW^{EXT}$$

$$\Delta E_{k,S} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W^{EXT} + W^{INT}.$$

Se le forze interne sono conservative, allora si può definire una funzione energia potenziale delle forze interne:

$$dE_P^{INT} = -\, dW^{INT}$$

Ma $dW^{INT} = \sum_1^N{}_i\, dWi^{(i).} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(I)}\cdot d\mathbf{r}_i = -\, ½\sum_{ij} \mathbf{F}^{(i)}(r_{ij})\cdot d\mathbf{r}_{ij}$,

mentre $dE_P^{INT} = ½\sum_{i,j}^{(i\neq j)} dE_p^{int}(\mathbf{r}_{ij})$, con $dE_p^{int}(\mathbf{r}_{ij}) = -\, \mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r}_{ij})\cdot d\mathbf{r}_{ij}$,

e quindi: $\Delta E_P^{INT} = -\, W^{INT}$

Il teorema dell'energia cinetica per un sistemi di P.M.:

$dE_{k,S} = dE_P^{INT} + dW^{EXT}$ o in termini finite: $\Delta E_{k,S} = W^{EXT} + W^{INT}$.

diventa : $\Delta E_{k,S} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W^{EXT} - \Delta E_P^{INT}$,

$$\Delta E_{k,S} + \Delta E_P^{INT} = W^{EXT}$$

Def. di Energia propria $U_S = E_{k,S} + E_P^{INT}$.

Vale la relazione $\Delta(E_{k,S} + E_P^{INT}) = W^{EXT}$, ossia $\Delta U_S = W^{EXT}$

Se poi anche le forze esterne sono conservative, e quindi si può definire un'energia potenziale delle forze esterne:

$$dE_P^{EXT} = -\, dW^{EXT} = -\sum_1^N{}_i\, dWi^{(E)} = -\sum_i \mathbf{F}_i^{(E)}\cdot d\mathbf{r}_i$$

allora si potrà scrivere: $\Delta U_S = -\Delta E_P^{EXT}$, e quindi $\Delta(U_S + E_P^{EXT}) = 0$, cioè:

$$\Delta E_{T,S} = 0,$$

dove $E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_P^{EXT}$

Conservazione della Energia totale meccanica $E_{T,S}$ di un sistema S di particelle soggette all'azione di forze interne ed esterne conservative:

$$E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_p^{EXT} = \text{costante del moto.}$$

N.B.: Dipendenza di $E_{k,S}$ dal sistema di riferimento scelto e indipendenza di E_P^{INT} dal sistema scelto.

Pertanto il valore dell'energia totale meccanica dipende dal sistema di riferimento usato per descrivere il moto del sistema. Infatti, nel sistema C, ancorato al CM:

$$E'_{k,S} = \sum_1^N{}_i\ E'_{k,i} = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v'^2_i$$

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}^{INT}$

Mentre la somma $E_{k,S}^{INT} + E_P^{INT}$ è detta energia interna U_S^{INT}:

$$U_S^{INT} = (E_{k,S}+E_P)^{INT}$$

In virtù del teorema di Konig per l'energia cinetica si avrà:

$$E_{k,S} = \tfrac{1}{2} Mv_{CM}^2 + E_{k,S}^{INT} = E_{k,CM} + E_{k,S}^{INT}$$

E quindi in principio di conservazione dell'energia si potrà esprimere come:

$$E_{T,S} = E_{k,CM} + E_{k,S}^{INT} + E_P^{INT} + E_p^{(EXT)} = E_{k,CM} + U_S^{INT} + E_p^{EXT}$$

N.B.: Per un sistema di punti materiale soggetto all'azione di forze interne ed esterne conservative, si conserva l'energia totale meccanica ma, in generale, NON l'energia propria.

Esempi di sistemi per cui si conserva l'energia meccanica totale:

Due corpi puntiformi collegati fra loro da una molla in moto nel campo di forza gravitazionale della terra.

Sistema di due corpi attaccati alla estremità di un molla completamente compressa da una fune in tiro, posto in quiete sul piano inclinato con un corpo appoggiato a una staffa fissata alla base del piano inclinato. Improvvisamente le fune si spezza e il sistema si mette in moto lungo il piano inclinato.

<u>Sistemi a due corpi: sono i più semplici sistemi di particelle</u>

Problema dei due corpi: <u>studio del moto relativo di due corpi</u> supposti puntiformi sotto l'azione della forza di interazione mutua.

<u>Esempio</u>: moto (relativo) di due corpi celesti sotto l'azione della forza gravitazionale moto di un pianeta relativo al sole, moto della luna rispetto alla terra, moto dell'elettrone rispetto al protone dell'atomo do idrogeno, ma anche il moto (relativo) di un coppia di punti materiali collegati tra loro da una molla

Le grandezza cinematiche (posizione velocità e accelerazione) del centro di massa del sistema dei due corpi nel sistema L e C:

Vettori $\mathbf{r}_{CM}$, $\mathbf{v}_{CM}$, $\mathbf{a}_{CM}$ del centro di massa nel sistema L:

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i\, \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{r}_i + m_2\mathbf{r}_2) / (m_i + m_2)$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i\, \mathbf{v}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{v}_i + m_2\mathbf{v}_2) / (m_i + m_2)$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i\, \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{a}_i + m_2\mathbf{a}_2) / (m_i + m_2)$$

Vettori $\mathbf{r}'_{CM}$, $\mathbf{v}'_{CM}$, $\mathbf{a}'_{CM}$ del centro di massa nel sistema C:

$$\mathbf{r}'_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i\, \mathbf{r}'_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{r}'_i + m_2\mathbf{r}'_2) / (m_i + m_2) = 0$$

$$\mathbf{v}'_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i\, \mathbf{v}'_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{v}'_i + m_2\mathbf{v}'_2) / (m_i + m_2) = 0$$

$$\mathbf{a}'_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i\, \mathbf{a}'_i / \sum_{i=1}^{2} m'_i = (m_1\mathbf{a}'_i + m_2\mathbf{a}'_2) / (m_i + m_2) = 0$$

Grandezze cinematiche relative: (L) $\mathbf{r}_{12,}$ $\mathbf{v}_{12}$ $\mathbf{a}_{12}$ e (C) $\mathbf{r}'_{12,}$ $\mathbf{v}'_{12}$ $\mathbf{a}'_{12}$

N.B.: Il vettore posizione, velocità e accelerazione relativa dei due corpi non devono dipendere dal sistema si riferimento L o C che sia. Infatti:

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_{12} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}'_{21},$$
$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_{12} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}'_{21},$$
$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}'_{12} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}'_{21}$$

Vogliamo trovare le relazioni che legano le grandezza cinematiche (posizione velocità e accelerazione) individuali dei due corpi in termini delle corrispondenti grandezze relative nel sistema L e nel sistema C:

Vettore posizione della particella m_i nel sistema C:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}$$

$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = m_2\, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_{12}$

$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = m_1\, \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_{21}$

Vettore velocità della particella m_i in C:

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$$

$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = m_2\, \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CM} = m_1\, \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)$ $\qquad$ $\mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$

Vettore accelerazione della particella m_i nel sistema C:

$$\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}$$

$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{CM} = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2)$ $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$

$\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{CM} = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2)$ $\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$

N.B.: Nel caso in cui il sistema delle due particelle sia isolato (i.e.: quando non $\exists\ \mathbf{F}_{ik}^{(e)}$ e quindi $\mathbf{F}_i^{(E)} = 0$, per i = 1, 2), per cui quindi $\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$, si ha che l'accelerazione relativa $\mathbf{a'}_i$ e l'accelerazione assoluta $\mathbf{a}_i$ di ciascuna particella coincidono e sono legate all'accelerazione relative $\mathbf{a}_{ij}$:

$$\mathbf{a}'_1 = \mathbf{a}_1 = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2)$$

<u>Problema dei due corpi: massa ridotta.</u>

<u>Studio del moto relativo di due corpi</u> supposti puntiformi sotto l'azione della forza di interazione mutua $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(r_{12})$

Esempi: $\mathbf{F}_G(r_{12}) = \gamma\ Mm\ \mathbf{r}_{12}/r_{12}^3$; $\mathbf{F}_{el}(x_{12}) = -\ k\ [(x_2-x_1) - l_0]\ \mathbf{i}$

Equazione del moto di ognuno dei due PM espressa dalla legge di Newton: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}(r_{12})$:

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}$$
$$m_2\mathbf{a}_2 = -\ \mathbf{F}_{12}$$

Accelerazione relativa della particella 1 rispetto alla particella 2:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}(1/m_1 + 1/m_2)$$

In termini di massa ridotta $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$: $1/\mu = [1/m_1 + 1/m_2]$

Si avrà:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}/\mu$$

Questa relazione esprime il moto relativo delle 2 particelle, soggette unicamente alla loro mutua interazione, che è stata ottenuta partendo dall'equazione del moto delle 2 particelle, può essere scritta anche così:

$$\mu \mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}$$

Essa è l'equazione del moto in un SRI (Sistema L) di una particella di massa μ soggetta all'azione di una forza F_{12}.

Ora $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}'_1 - \mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}'_{12}$ (perché sistema isolato).

Quindi sarà pure:

$$\mu \mathbf{a}'_{12} = \mathbf{F}_{12}$$

Questa è l'equazione del moto nel Sistema C (ancorato al CM del sistema) di una particella di massa μ soggetta all'azione di una forza F_{12}.

N.B.: Il moto relativo di due particelle nel sistema di riferimento L è equivalente al moto di una particella di massa μ (massa efficace del sistema) soggetta all'azione di una forza uguale alla forze di interazione mutua $\mathbf{F}_{12}$ studiato nel sistema C (che è un sistema di riferimento inerziale!)

N.B.: A rigore, lo studio del moto relativo in un SRI di due corpi celesti soggetti all'azione della forza di attrazione gravitazionale è ricondotto allo studio, nel sistema di riferimento C, del moto di un corpo di massa μ che si muove sotto l'azione di $\mathbf{F}_G$. Tuttavia ….

Cosa succede quando $m_1 >> m_2$ (sistemi sole-pianeta, pianeta-satellite, come ad esempio il sistema terra–luna: massa terra >>

massa luna; etc. o nel caso dell'atomo di idrogeno: massa protone >> massa elettrone).

La massa ridotta $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2) = m_2/(1 + m_2/m_1) \cong m_2$
mentre la posizione del CM del sistema "coincide" con m_1
e questo giustifica l'approssimazione usata nell'espressione della legge di gravitazione universale fatta da noi finora e l'adozione del sistema di riferimento con origine O ancorato alla massa m_2.

In generale, se le due masse sono confrontabili, si deve studiare il moto, nel sistema C, in termini della massa ridotta μ.

Esempio: Caso del moto roto-traslatorio su un piano orizzontale perfettamente liscio di manubrio costituito da 2 corpi puntiformi ancorati alle estremità di un'asta rigida lunga L e priva di massa. Calcolo della tensione della asta:

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{T}_1$$
$$m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{T}_2$$

Per il principio di A/R: $\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1$, ma $T_2 = T_1$

$$T = \mu\, v_{12}{}^2/r_{12} = \mu\, v_{12}{}^2/L.$$

N.B.: Il modulo T dipende dalla velocità di rotazione ω del manubrio, atteso che $v_{12} = L\omega$, che, quindi, deve essere nota.

<u>Esercizio</u>: Coppia di PM collegati da una molla a riposo e posti in quiete su un piano orizzontale perfettamente liscio. A $t_0 = 0$ viene applicato un impulso $\mathbf{J}_0 = J_0\, \mathbf{i}$ al corpo di massa m_1. Studiare il moto del sistema dopo l'applicazione dell'impulso.

Esercizi:

1) Due blocchi di massa m_1 e m_2, posti su piano orizzontale liscio, sono attaccati alle estremità di una molla ideale di costante elastica k e di lunghezza a riposo l_0, con l'asse di simmetria lungo l'asse x. Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete con la massa m_1 appoggiata alla base di una parete verticale fissa con la molla completamente compressa tramite una fine ancorata alla due masse. All'istante t = 0 la molla viene lasciata espandere, e nell'istante t_0 in cui la molla raggiunge la sua lunghezza di riposo, la massa m_1 si stacca dalla parete**.** Studiare il moto del sistema per t>0, calcolando espressamente nel sistema di riferimento del laboratorio:
a) l'accelerazione del CM del sistema all'istante $t = 0_+$;
b) la legge oraria del moto del CM dopo che il blocco di massa m_1 ha abbandonato la parete verticale;
c) le leggi orarie del moto dei due blocchi.

2) Due blocchi di massa m_1 e m_2 , inizialmente in quiete su un piano orizzontale liscio, sono attaccati alle estremità di una molla ideale di costante elastica k e di lunghezza a riposo l_0, con l'asse di simmetria lungo l'asse x. All'istante t = 0 viene applicato al blocco di massa m_1 in direzione parallela all'asse di simmetria della molla un impulso $\mathbf{J}_0 = J_0\,\mathbf{i}$**.** Studiare il moto del sistema, determinando in particolare:
a) la posizione iniziale del CM,
b) la legge oraria del moto del CM,
c) le leggi orarie del moto dei sue blocchi

Espressione delle grandezze collettive nel sistema C e delle relazioni di Konig per un sistema a due corpi.

Quantità di moto:

$$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{0},$$

da cui $\mathbf{p}'_1 = -\,\mathbf{p}'_2$, e ricordando che $\mathbf{v}'_1 = m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$, Si avrà anche:

$\mathbf{p}'_1 = m_1\mathbf{v}'_1 = m_1m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2) = \mu\ \mathbf{v}_{12}$

$\mathbf{p}'_2 = m_2\mathbf{v}'_2 = m_2m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2) = \mu\ \mathbf{v}_{21} = -\ \mu\ \mathbf{v}_{12}$.

Quindi: $p'_1 = p'_2 = \mu\ v_{12} = p'$

N.B.: Il modulo della quantità di moto di ognuna delle due particelle, nel sistema C, equivale al modulo della quantità di moto di una particella di massa μ che si muove con al velocità relativa delle due particelle.

Ovviamente:

$$\mathbf{P}'_S = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mu\ \mathbf{v}_{12} - \mu\ \mathbf{v}_{21} = \mathbf{0},$$

<u>Energia cinetica interna</u>: E_k^{INT}

$$E_k^{INT} = \tfrac{1}{2}\mu\ v_{12}^2 = p'^2/2\mu$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}E_k^{INT} &= \tfrac{1}{2}\ m_1\ v'^2_1 + \tfrac{1}{2}\ m_2\ v'^2_2\\ &= \tfrac{1}{2}\ m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)]^2 + \tfrac{1}{2}\ m_2\ [m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)]^2 =\\ &= \tfrac{1}{2}\ m_1m_2^2\ \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 + \tfrac{1}{2}\ m2m^{12}\ \mathbf{v}_{21}^2/(m_1+m_2)^2 =\\ &= \tfrac{1}{2}\ m_1m_2\,(m_1+m_2)\ \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 = \tfrac{1}{2}\ m_1m_2\ \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2) =\\ &= \tfrac{1}{2}\ \mu\ \mathbf{v}_{12}^2\end{aligned}$$

N.B.: <u>L’energia cinetica interna</u> di un sistema di 2 particelle equivale all’energia cinetica di una particella di massa μ che si muove con la velocità relativa delle due particelle.

<u>Momento angolare interno o intrinseco</u>: $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$

$$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\ \mathbf{v}_{12}\ .$$

Dimostrazione:

$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}'_1 \wedge m_1 \mathbf{v}'_1 + \mathbf{r}'_2 \wedge m_2 \mathbf{v}'_2 =$

$= m_2\ \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \wedge m_1[m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + m_1\ \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2) \wedge m_2\ [m_1 \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)] =$

$= m_2 \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \wedge m_1[m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + [- m_1\ \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2)] \wedge m_2\ [- m_1 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge m_1 m_2^2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 + \mathbf{r}_{12} \wedge m_1^2 m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1 m_2^2/(m_1+m_2)^2 + m_1^2 m_2/(m_1+m_2)^2]\ \mathbf{v}_{12} =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1 m_2\,(m_1+m_2)/(m_1+m_2)^2]\ \mathbf{v}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\ \mathbf{v}_{12}$

N.B.: Il momento angolare intrinseco $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$ (riferito al CM) di un sistema di 2 particelle equivale al momento della quantità di moto (riferito ad un punto O) di una particella di massa μ che si trova nel punto individuato dal raggio vettore posizione relativa $\mathbf{r}_{12}$ che si muove con la velocità relativa delle due particelle $\mathbf{v}_{12}$.

<u>Teoremi di Konig per un sistema due corpi</u>

N.B.: La velocità $\mathbf{v}_{CM}$ di un sistema isolato è costante:

Usando le grandezze calcolate nel sistema C si avrà:

$$\mathbf{P}_S = M\ \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P}'_S = M\ \mathbf{v}_{CM}$$

$$E_{k,S} = E_{k,CM} + E_k^{INT} = \tfrac{1}{2}\ M v_{CM}^2 + \tfrac{1}{2}\ \mu\ v_{12}^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,CM} + \mathbf{L}'_{CM,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\ \mathbf{v}_{12}$$

Risoluzione di alcuni problemi di dinamica dei sistemi a 2 corpi.