Ritorniamo su $I_n = 1 - n I_{n-1}$, $I_0 = 1 - \frac{1}{e}$.

È una formula instabile. Vediamo come renderla stabile. Riscrivo la relazione come

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n}$$

I_N valore per $N >> n$

Nella aritmetica di macchina pongo $\hat{I}_N = 0$ per cui ho

$$\hat{I}_N = 0 = I_N (1 + \epsilon)$$

dove I_N è il valore esatto

$$\hat{I}_{N-1} = \frac{1 - \hat{I}_N}{N} = \frac{1 - I_N (1 + \epsilon)}{N} =$$

$$= \frac{1 - I_N}{N} - \frac{\epsilon I_N}{N}$$

$$= \underbrace{I_{N-1}}_{\text{valore vero}} \underbrace{- \frac{\epsilon I_N}{N}}_{\text{errore}}$$

$$\hat{I}_{N-2} = \frac{1 - \hat{I}_{N-1}}{N-1} = \frac{1 - \left(I_{N-1} - \epsilon \frac{I_N}{N}\right)}{N-1} =$$

$$= \underbrace{\frac{1 - I_{N-1}}{N-1}}_{= I_{N-2}} + \underbrace{\frac{\epsilon I_N}{N(N-1)}}_{\text{errore}}$$

$$\vdots$$

$$\hat{I}_n = I_n + (-1)^{*} \cdot \frac{\epsilon I_N}{N(N-1)\cdots(n+1)}$$

$*$ → dà il segno + o −

Il denominatore dell'errore cresce rapidamente abbattendo l'errore iniziale. Ad esempio, se voglio I_n con $n = 20$ prendo $N = 60$ (o $N = 40$) ed ho

$$\frac{\epsilon I_N}{N(N-1)\cdots(n+1)} \lesssim \frac{\epsilon I_N}{\underbrace{60 \cdot 59 \cdot \ldots \cdot 21}_{\lll 20^{40}}} \lll \frac{\epsilon I_N}{20^{40}}$$

→ l'errore iniziale è abbattuto!

CIFRE DI GUARDIA

Le operazioni di macchina sono definite

$$x \odot y = fl(x \cdot y) = xy(1+\epsilon) \qquad \text{con } |\epsilon| < u$$
$$x \ominus y = fl(x - y) = (x-y)(1+\epsilon)$$

e così via.

In realtà le cose NON funzionano come abbiamo scritto per le differenze e le somme. Ad esempio consideriamo $\mathbb{F}(10, 2, -3, 3)$ con $x = 1$, $y = 0.99$. Voglio calcolare $x \ominus y$. Ho

$$x = 1 = 10^1 \cdot 0.10 = 10^1 \cdot 0.10$$
$$y = 0.99 = 10^0 \cdot 0.99 = 10^1 \cdot 0.09\cancel{9}$$
$$\overline{10^1 \cdot 0.01} = 0.1$$

valore errato in modo grossolano!

Posso porre rimedio aggiungendo una ulteriore cifra quando faccio la sottrazione:

cifra di guardia

$$x = 10^1 \cdot 0.10\boxed{0}$$

$$y = 10^1 \cdot 0.09\boxed{9}$$

$$10^1 \cdot 0.001 = 0.01$$

Valore corretto!

Per il pieno rispetto delle definizioni di operazioni di macchina date servono due o tre cifre di guardia.

Serve più tempo per i conti però!

ESERCIZIO Sia $f(x) = 1 - \cos(x)$.

(a) Valutare il numero di condizionamento K per il calcolo di $f(x)$ con $x \approx 0$, $x \neq 0$.

Dire se questo problema è ben o mal condizionato.

(b) In $\mathbb{F}(10, 3, -6, 6)$, dire se la formula $f(x) = 1 - \cos(x)$ è stabile e in caso negativo proporre una formula equivalente stabile.

ESERCIZIO Ripetere l'esercizio precedente per $f(x) = x - \text{sen}(x)$

EQUAZIONI NON LINEARI

Il problema è trovare le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0$$

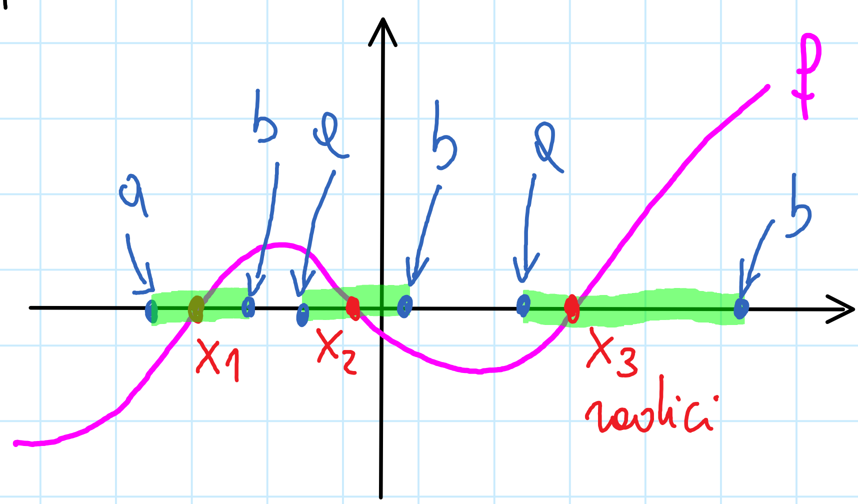
o, equivalentemente, di

$$g(x) = h(x)$$

Ci poniamo nelle ipotesi seguenti

(i) nell'intervallo $[a, b]$ c'è un'UNICA soluzione di $f(x) = 0$ (ho SEPARATO le radici).

(ii) f è continua nell'intervallo $[a, b]$.



Considero UNA di queste radici e cerco di approssimarla (cioè conoscerla con un prefissato numero di cifre).

A questo scopo si usano dei METODI ITERATIVI che, partendo da una approssimazione iniziale della radice ξ, costruiscono una successione x_k che (sperabilmente!) converge a ξ:

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = \xi$$

Sia

$e_k = \xi - x_k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ errore al passo k

x_0 punto di partenza

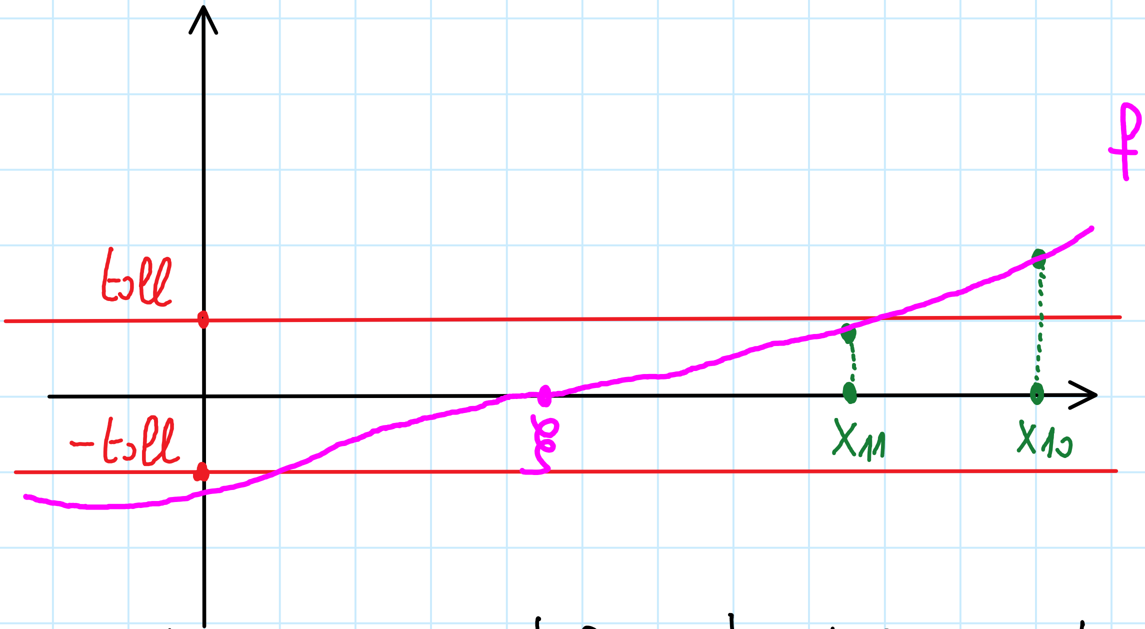
Per sapere se la successione x_n converge a ξ e quanto vicino è l'iterata x_n a ξ NON posso usare l'errore e_n perché NON conosco ξ. Uso allora degli altri criteri.

(•) Test sul residuo assoluto $|f(x_n)|$

Dico che se

$$\boxed{|f(x_n)| \leq toll} \quad \text{con toll dato}$$

allora x_n è vicino a ξ (ricordiamoci che $f(\xi)=0$ per cui se $|f(x_n)| \leq toll$ con toll molto piccolo ho $f(x_n) \approx 0$ ossia RITENGO che $x_n \approx \xi$). Vediamo se è affidabile.

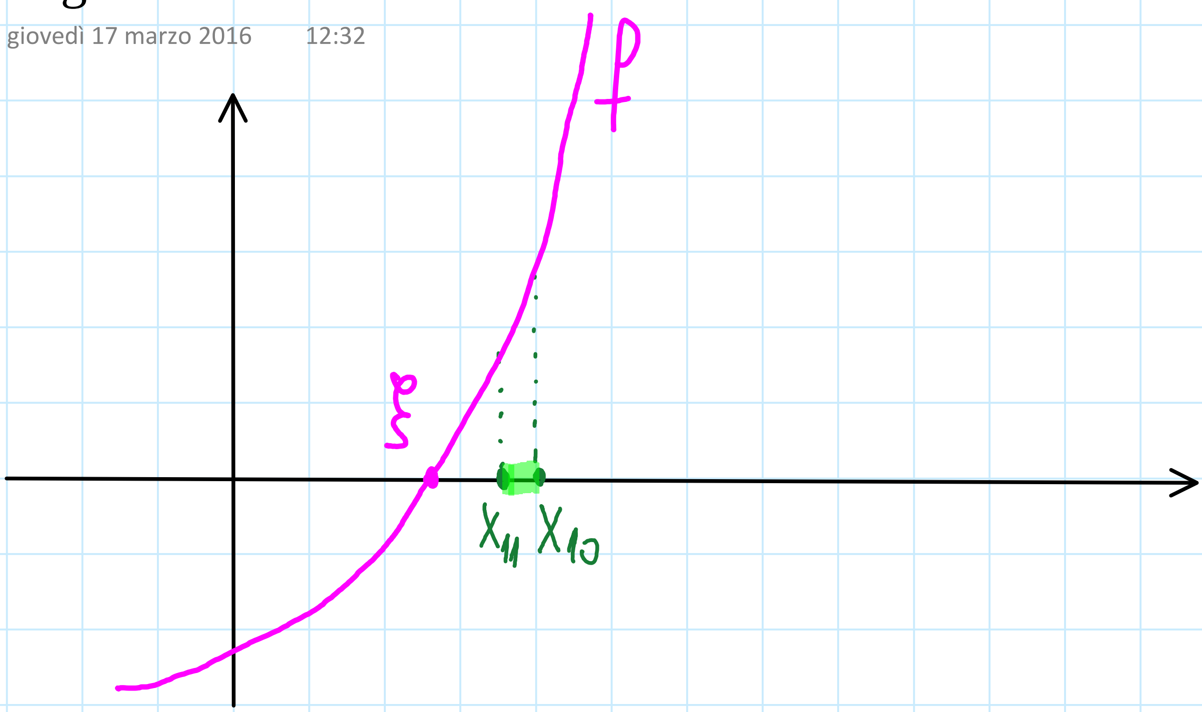


In questo caso è $|f(x_{11})| < toll$ ma $|x_{11} - \xi|$ è grande! In altre parole, x_{11} è una cattiva approssimazione di ξ anche se x_{11} soddisfa il criterio $|f(x_{11})| < toll$.

(b) Test sullo scarto. Ritengo di avere trovato la soluzione ξ quando

$$\boxed{|\underbrace{x_{k+1} - x_k}_{\text{scarto}}| \leq toll}$$

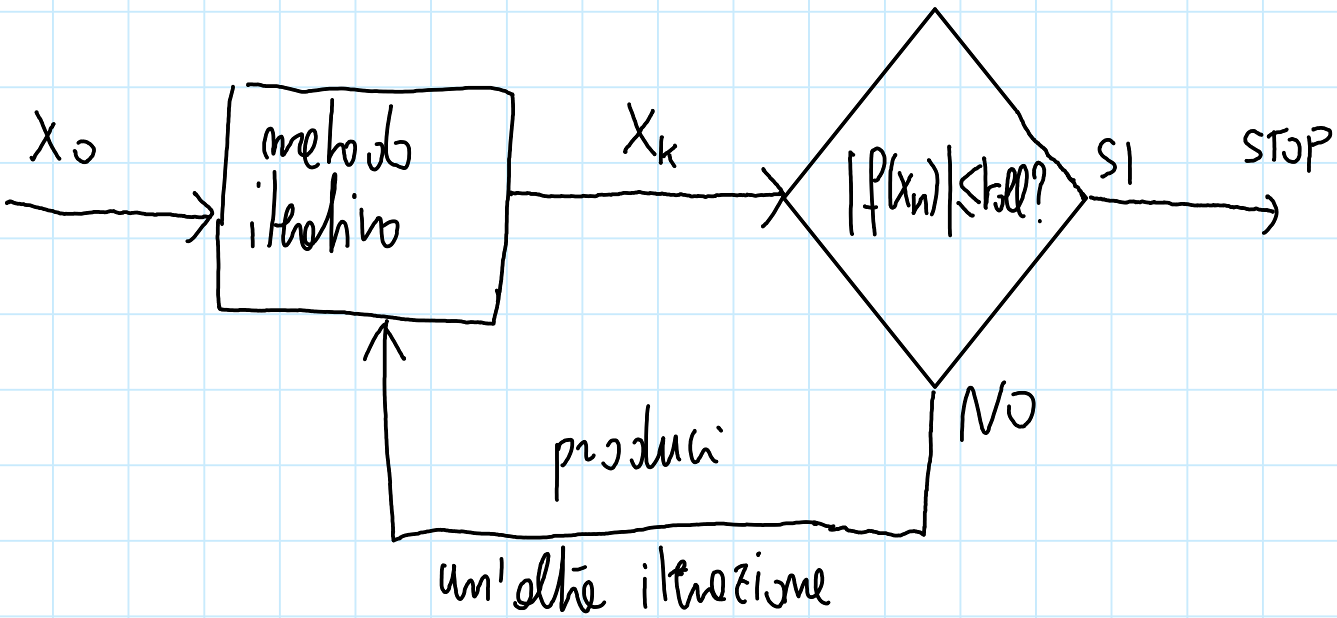
Anche questo criterio può dar luogo a errori:



In questo caso è $|x_{11} - x_{10}| \leq toll$ anche se sono lontano dalla soluzione!

Per essere più sicuri un test reale è la combinazione di entrambi.

OSS. Questi test sono usati come criteri per arrestare, quando verificati, le iterazioni prodotte dal metodo iterativo.



Un aspetto importante è quanto velocemente la successione x_k converge a ξ.

DEF. La successione x_k convergente a ξ ha

ORDINE DI CONVERGENZA $p>0$ se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = M$$

costante asintotica dell'errore.

per qualche $M>0$

Togliendo il limite ho

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} \approx M \Rightarrow |e_{n+1}| \approx M \cdot |e_n|^p$$

Se $p = 2$ e $M = 1$ ed ho $|e_n| = 10^{-6}$ allora

$|e_{n+1}| \approx 1 \cdot (10^{-6})^2 = 10^{-12}$. Ho guadagnato 6 cifre in un passaggio!!

Se $p = 1$ e $M = \frac{1}{2}$ ed ho $|e_n| = 10^{-6}$ allora è

$$|e_{n+1}| \simeq \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} = 0.5 \cdot 10^{-6}$$