Integrazione su varietà

TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE Prof. M. Spera
a.a. 2009/10
Lezione XXXIII

Integrazione in $\mathbb{R}^n$ (Riemann)

elemento di volume

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, |dx_1 \ldots dx_n|$$

liscia, a supporto compatto

(notazione classica $| \; | \to dx_1 \ldots dx_n$
$dx_1 \ldots dx_n \to dx_1 \wedge dx_1 \ldots \wedge dx_n$

⚠

$$\omega = f \, dx_1 \ldots dx_n$$

"elemento di vol." orientato

n-forma a supporto compatto

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f \, |dx_1 \ldots dx_n|} \quad \left(\equiv \int f \, |dx_1 \ldots dx_n|\right.$$

con questa definizione

$$\int f \, dx_{\pi(1)} \ldots dx_{\pi(n)} = (\operatorname{sgn} \pi) \int f \, | \quad |$$

(ovviamente

$$\int f \, |dx_{\pi(1)} \ldots dx_{\pi(n)}| = \int f \, |dx_1 \ldots dx_n|$$

Cambiamento di coordinate

$$T : \underset{y}{\mathbb{R}^n} \to \underset{x}{\mathbb{R}^n} \quad \text{diffeomorfismo} \quad x = Ty$$

$$x_i = x_i \circ T \, (\underset{y}{y_1 \ldots y_n}) \equiv T_i (y_1 \ldots y_n)$$

$J(T)$ Jacobiano

$$\begin{matrix} dT_1 \ldots dT_n \\ dx_1 \ldots dx_n \end{matrix} = \underbrace{\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)}_{J(T)} dy_1 \ldots dy_n \equiv J(T) \, dy_1 \ldots dy_n$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^* \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T)\, dT_1 \dots dT_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T)\; J(T)\, dy_1 \dots dy_n$$

ma si ha pure:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T)\; |J(T)|\, dy_1 \dots dy_n$$

notare!

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} T^* \omega = \pm \int_{\mathbb{R}^n} \omega$$

preserves orientation

"T conserva l'orientamento" $J(T) > 0 \to +$

$< 0 \to -$

T rovescia l'orientamento

cambiamenti di base reverses orientation

base canonica di $\mathbb{R}^n$

$(e_i) = (0, 0, \underset{i}{1}, 0, 0)$

(f_i) $\det Y_i \gtrless 0$

$b_1 \sim b_2$ se $\det B_{12} > 0$

$X = T(Y)$

$Y = T^{-1}(X)$

$T : Y \to X$

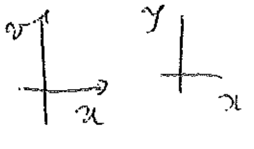
$T^* dx_1 \dots dx_n$

$= dT_1 \dots dT_n$

$\cdot\; J(T)\, dy_1 \dots dy_n$

$\equiv J(T)\, dx_1 \dots dx_n$

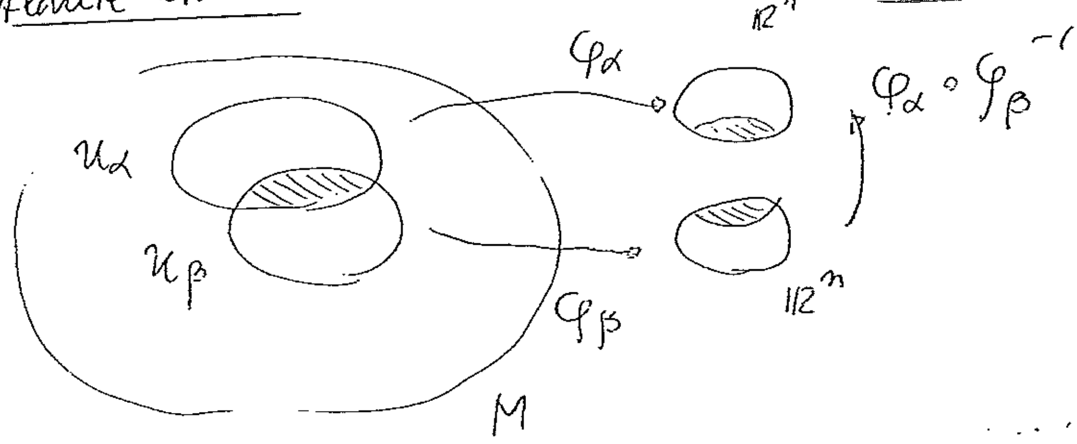
$X(x)$ cambiare nome



Varietà orientabili

Sia M varietà liscia $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ atlante

atlante orientato: $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ conservano l'orientamento



Se $\mathcal{A}$ è orientato si parla di var. orientabile

Osservazione: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ conserva l'orientamento $\iff$ $T^* dx_1 \dots dx_n = \lambda(x)\, dx_1 \dots dx_n$, $\lambda(x) > 0 \ \forall x$.

Più in generale:

Proposizione M var. di dim n è orientabile $\iff$ possiede una n-forma globale mai nulla.

Dim. ($\Leftarrow$) Sia w n-forma globale mai nulla e φ_α una carta locale. Si ha

$$\boxed{\varphi_\alpha^* dx_1 \dots dx_n = f_\alpha\, w} \qquad f_\alpha \neq 0 \text{ su } U_\alpha$$

Si può assumere $f_\alpha > 0 \ \forall \alpha$ (es. scambiando due coordinate ...)

$\Rightarrow$ $\boxed{(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^* dx_1 \dots dx_n} = (\varphi_\alpha^{-1})^* \varphi_\beta^* dx_1 \dots dx_n$

$= (\varphi_\alpha^*)^{-1} \varphi_\beta^* dx_1 \, dx_n$

$\forall\ \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ manda $dx_1 - dx_n$ in un suo multiplo (positivo!)

$\| \quad f_{\beta} f_\alpha^{-1} dx_1 \dots dx_n$, > 0

$\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ è orientato.

$(\Rightarrow)$ Sia dato $\mathcal{A}$ orientato

$$(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^* (dx_1 \dots dx_n) = \underset{>0}{\lambda(x)}\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= (\varphi_\alpha^{-1})^* (\varphi_\beta^* dx_1 - dx_n) :$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\varphi_\beta^* dx_1 \dots dx_n}_{w_\beta} = \varphi_\alpha^* (\lambda \cdot dx_1 \dots dx_n) =} \quad \left(\triangle! \text{ proprietà del pull-back} \right)$$

$$= \underset{\substack{\| \\ \lambda \circ \varphi_\alpha \\ \| \\ f}}{(\varphi_\alpha^* \lambda)} \underbrace{(\varphi_\alpha^* dx_1 \dots dx_n)}_{w_\alpha}$$

$\varphi^*(\omega \wedge \tau) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\tau$

$$\boxed{w_\beta = \underset{>0}{f}\, w_\alpha}$$

su $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$

Se $w = \sum \rho_\alpha w_\alpha$

$\uparrow$ part. dell'unità subordinata a $\{\mathcal{U}_\alpha\}$

in ogni punto le w_α, qualora definite, sono multipli positivi l'una dell'altra

Da $\sum \rho_\alpha = 1$, $\rho_\alpha \geq 0$ segue che $w \neq 0$ ovunque.

$\square$

Se M è orientabile, date due n-forme globali mai nulle, è

$$(\star) \quad w = f\, w' \qquad f \neq 0 \quad \forall x$$

definiamo allora:
$w \sim w'$ se vale $(\star)$
$[w]$: classe di w
$= \{ f w \mid f > 0 \}$

Se M è connessa, $f > 0$ o $f < 0$

$\leadsto$ $\star$ si hanno <u>due classi di equivalenza</u>

<u>una tale classe</u> è detta

$\star$ <u>orientamento</u> di M (<u>orientazione</u>) notazione: $[M]$

Dunque: una varietà <u>orientata</u> è una varietà <u>orientabile</u> in cui sia stato scelto <u>uno dei due</u> orientamenti

Ex: su $\mathbb{R}^n$: $dx_1 \ldots dx_n$ or. standard)
(è una n-forma globale $\neq 0 \ldots$)

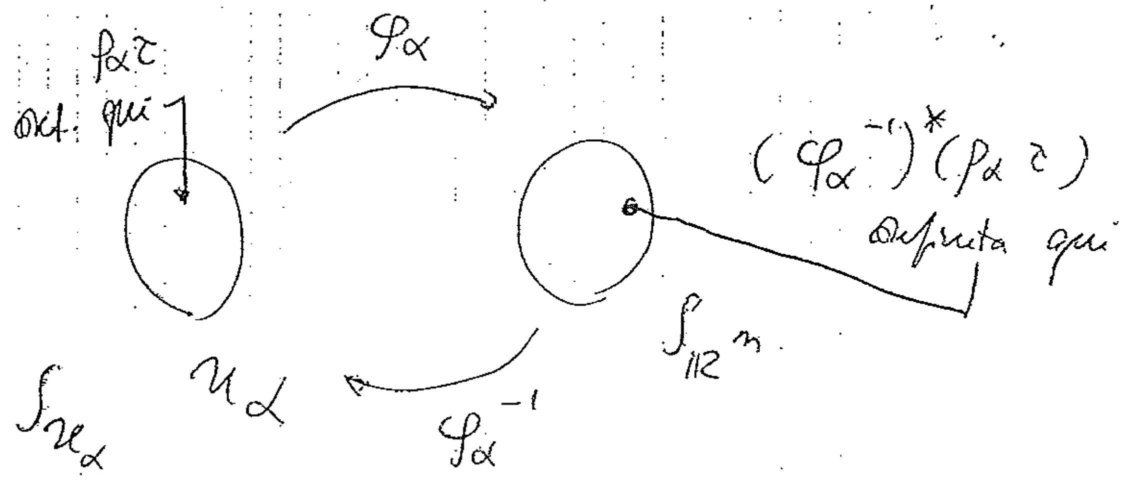
$\star$ Si scelga un <u>orientamento</u> $[M]$ su M

sia $\tau \in \Lambda^n_c(M)$ (supp. compatto)

$$\boxed{\int_{[M]} \tau := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau} \leadsto$$

$\mathcal{A} = \{ U_\alpha, \varphi_\alpha \}$ atl. orientato
$\{ \rho_\alpha \}$ part. dell'unità sub. a $\mathcal{U} = \{ U_\alpha \}$

dove $\boxed{\int_{\underset{\varphi_\alpha}{\underline{U_\alpha}}} \rho_\alpha \tau := \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha \tau)}$



☆ Grazie all'orientabilità $\int_{U_\alpha} \omega$ è ben definito.

Per brevità porremo

$$\boxed{\int_M \tau \equiv \int_{[M]} \tau}$$

☆ Fatto: $\int_M \tau$ non dipende né da $\mathcal{A} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ (atlante orientato) né da $\{\rho_\alpha\}$ (part. dell'unità)

☆ Osservazione: $\rho_\alpha \tau$ ha supporto compatto:

$\underset{\text{chiuso}}{\operatorname{supp} \rho_\alpha \tau} \subset \operatorname{supp} \rho_\alpha \cap \operatorname{supp} \tau \subset \underset{\text{compatto}}{\operatorname{supp} \tau}$

e A chiuso $\subset$ B compatto

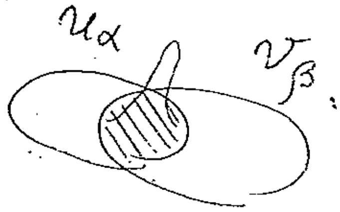
$\Rightarrow$ (in Hausdorff) A compatto.

Dim: Sia dato $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ e $\{\chi_\beta\}$

orientato

$$\boxed{\sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \tau = \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \chi_\beta \tau}$$

$$\left(\sum_\beta \chi_\beta = 1 \right)$$



$$\operatorname{supp} \rho_\alpha \chi_\beta \tau \subset U_\alpha \cap V_\beta$$

$$\Rightarrow \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \chi_\beta \tau = \int_{V_\beta} \rho_\alpha \chi_\beta \tau$$

punto cruciale

$$\Rightarrow \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha} (\quad) = \sum_{\alpha,\beta} \int_{V_\beta} (\quad) =$$

$$= \sum_\beta \int_{V_\beta} \chi_\beta \tau$$

Varietà con bordo

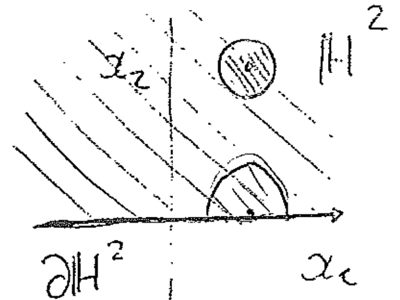
$$M \qquad \mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)\}$$

stessa definizione, ma con $\mathcal{U}_\alpha$ omeo $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ $\simeq$ palla

commento.. buon ricoprimento

$\simeq \mathcal{V}_\alpha$ palla $\mathbb{H}^n = \{(x_1 \dots x_n) / x_n \geq 0\}$

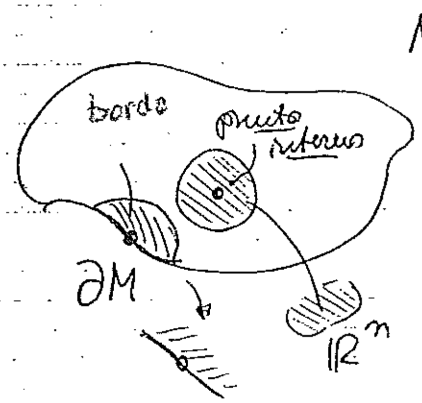
semispazio superiore



$$\partial M = \{p \in M \ / \ \exists \text{ una carta } \varphi \text{ tale che } \varphi(p) \in \{x_n = 0\} \text{ i.e. } \varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n\}$$

∂M è una varietà di dim. $n-1$

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1 \dots x_n) / x_n = 0\}$$

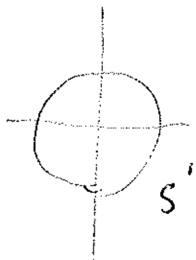


Nota a margine: si ha un buon ricoprimento (good covering) se $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \phi \Rightarrow \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ è contraibile [i.e. ha lo stesso tipo di omotopia di un punto]
Ogni varietà diff. ammette un buon ricoprimento (la dim. impiega la geometria riemanniana)

Bordo vs frontiera	
manifold boundary	topological boundary

inaso

$\overline{D^2}$ disco chiuso unitario in $\mathbb{R}^2$



notazione ambigua

frontiera $\partial \overline{D^2} = \overline{D^2} \setminus D^2 = S^1$

$\to$ bordo $\partial \overline{D^2} = S^1$

$X = \overline{D^2}$ come sp. topologico in sé

$X = \overline{X} = \overset{\circ}{X} \Rightarrow \partial X = \emptyset$

gli interni — frontiera

$X = \overline{D^2} \subset \mathbb{R}^3$

$\overline{X} = X \qquad \overset{\circ}{X} = \emptyset$

$\partial X = X$

frontiera

— • —

D^2 bordo $\partial D^2 = \emptyset$

ma D^2, come ogni varietà ordinaria, si può vedere come varietà con bordo $x_n \sim y_n = e^{x_n} > 0$

frontiera: $\overline{D^2} \setminus D^2 = S^1$ (come s. ins. di $\mathbb{R}^2$)

in sé: frontiera $= \emptyset$

Un atlante orientato su M induce in modo naturale un atlante orientato su ∂M

$\Rightarrow$ $[M]$ induce $[\partial M]$

Ciò segue dal fatto seguente, che accertiamo nel caso $n=2$

Sia $T : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ diffeomorfismo

con $J(T) > 0$

Allora T induce

$$\overline{T} : \partial\mathbb{H}^n \to \partial\mathbb{H}^n$$

(diffeo di $\mathbb{R}^{n-1}$) e $J(\overline{T}) > 0$

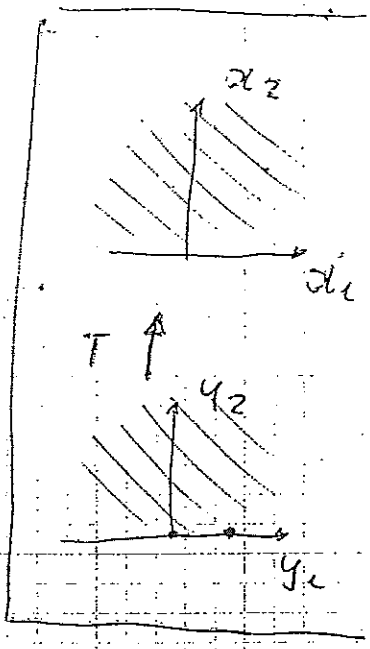
Dim. ($n=2$) Certamente $\overline{T}$ è ben definita poichè punti interni sono mappati da T in pti interni (teorema delle funzioni inverse)

Sia
$$T: \begin{cases} x_1 = T_1(y_1, y_2) \\ x_2 = T_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

$$\bar{T}: \quad x_1 = T_1(y, 0)$$

Si ha:

$$J(T) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial T_1}{\partial y_1}(y_1,0) & \dfrac{\partial T_1}{\partial y_2}(y_1,0) \\ \underbrace{\dfrac{\partial T_2}{\partial y_1}(y_1,0)}_{=0} & \dfrac{\partial T_2}{\partial y_2}(y_1,0) \end{vmatrix} > 0$$



(*)

$\Rightarrow$ ma $T_2(y_1, 0) = 0 \quad \forall\, y_1$

Perciò: $\dfrac{\partial T_2}{\partial y_1}(y_1, 0) \equiv 0$

$$\Rightarrow J(T)(y_1,0) = \left(\frac{\partial T_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial y_2}\right)(y_1,0) > 0$$

Inoltre $\dfrac{\partial T_2}{\partial y_2}(y_1, 0) > 0$

(non può essere $= 0$ per ip., se fosse < 0
T non mapperebbe $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$!)

$$\Rightarrow \boxed{J(\bar{T}) = \frac{\partial T_1}{\partial y_1}(y_1, 0) > 0}$$

(*)
$$\frac{T_2(y_1,y_2) - \underbrace{T_2(y_1,0)}_{=0}}{y_2} = \frac{\overbrace{T_2(y_1,y_2)}^{\geq 0}}{y_2 > 0}$$ □

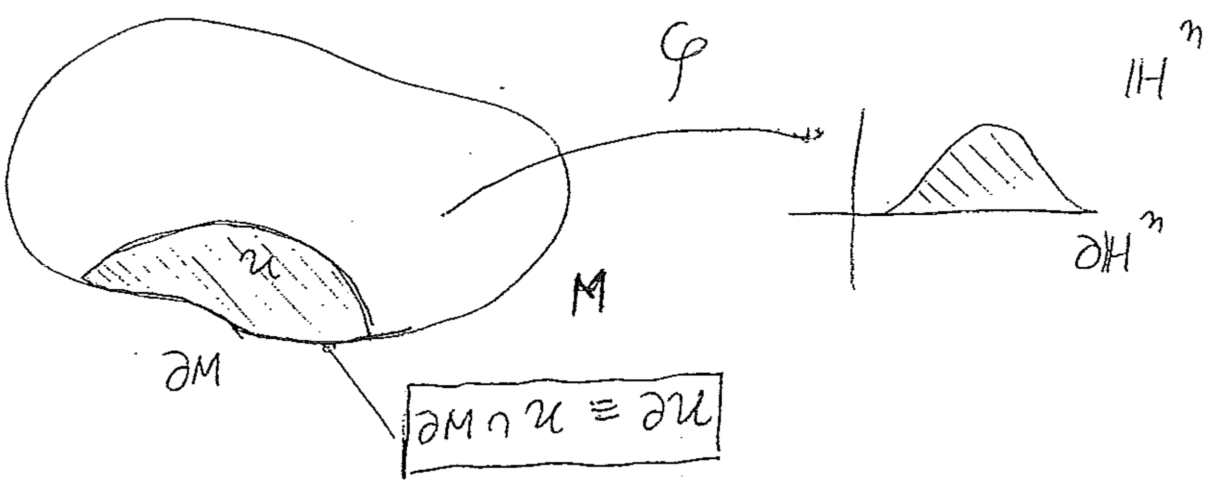
$\Rightarrow \lim\limits_{y_2 \to 0} (\ ) \geq 0$ ma il caso "=" è escluso lavoriamo con le forme !!

$dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

$$[\mathbb{H}^n] = dx_1 \dots dx_n \qquad \underline{\text{or. standard}}$$

$$[\partial \mathbb{H}^n] = (-1)^n dx_1 \dots dx_{n-1}$$

orient. indotto notare !!

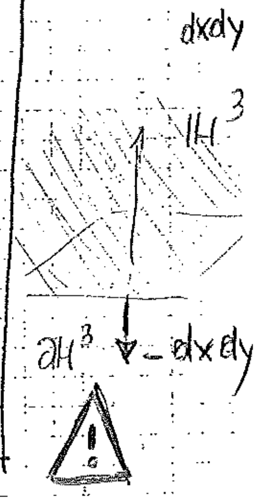


In generale

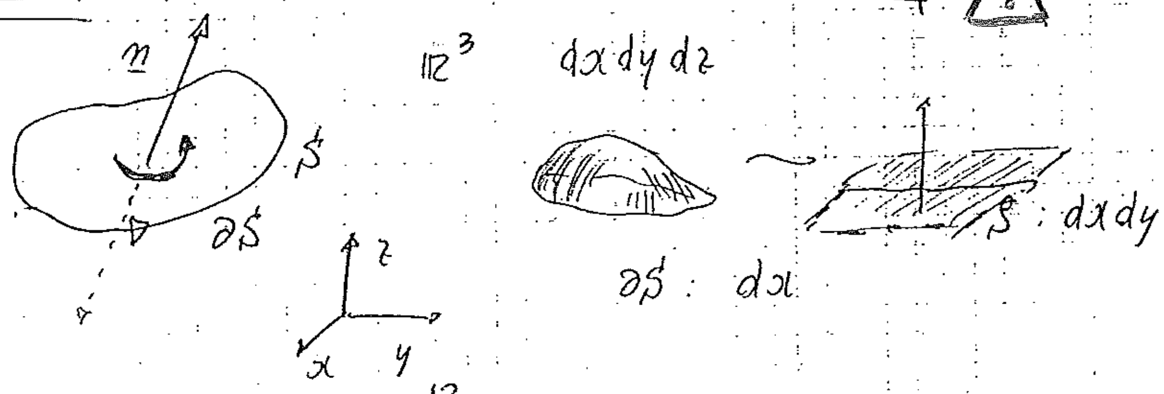
$$\boxed{[\partial M]\Big|_{\partial U} := \varphi^* [\partial \mathbb{H}^n]}$$

<u>orientamento</u> su ∂M $([\partial M])$

<u>indotto</u> da $[M]$



ex:



dim $M = n$

per evitare banalità prendiamo $n \geq 1$

★★★ Il teorema di Stokes

Sia $\omega \in \Lambda_c^{n-1}(M)$ ← supporto compatto

M orientata, ∂M con l'orientamento indotto. Allora

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

$[M]$ $[\partial M]$

Dim. (1) Il teor è vero in $\mathbb{R}^n$

Sia $\omega = f\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$ (si est. per linearità...)

$$d\omega = \pm \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_1 \ldots dx_n$$

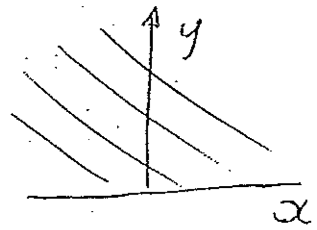
$$\int_{\mathbb{R}^n} d\omega \underset{\text{(Fubini)}}{=} \pm \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_1 \ldots dx_{n-1} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n}_{= 0} \Big)$$

$= 0$ (f ha supp compatto!)

$\partial \mathbb{R}^n = \phi$ .. ok.

② Il teorema è vero per $\mathbb{H}^n$

verifica per $n=2$



$$\omega = f\,dx + g\,dy$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\int_{\mathbb{H}^2} d\omega = \underbrace{-\int_{\mathbb{H}^2} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy}\, + \underbrace{\int_{\mathbb{H}^2} \frac{\partial g}{\partial x}\,dx\,dy}_{=\,0}$$

(perché?) → supporto compatto

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} [\underbrace{f(x,\infty)}_{=\,0} - f(x,0)]\,dx \quad \text{(perché?)}$$

$$= +\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,0)\,dx = \dots = \int_{\partial\mathbb{H}^2} \omega$$

③ Sia $\omega = \sum_\alpha \rho_\alpha \omega$

Per linearità basta considerare $\rho_\alpha \omega$, che ha supporto in $\mathcal{U}_\alpha$, compatto.

ma $\mathcal{U}_\alpha \cong \mathbb{R}^n$, $\cong \mathbb{H}^n$ $\Rightarrow$ (vale Stokes)

$$\int_M d(\rho_\alpha \omega) = \int_{\mathcal{U}_\alpha} d(\rho_\alpha \omega) = \int_{\partial \mathcal{U}_\alpha} \rho_\alpha \omega = \int_{\partial M} \rho_\alpha \omega$$

e concludiamo. □

★ **Inciso** $B^{n-1} \overset{\text{diff}}{\simeq} \mathbb{R}^n$ $\qquad n \geq 2$

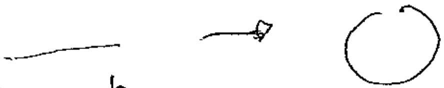
$$\| $$

$$\{(x_i) \in \mathbb{R}^n \,/\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1\}$$

Dim: Intanto.

$I = (a, b) \simeq S^1 - \{N\} \simeq \mathbb{R}$

proiezione stereografica



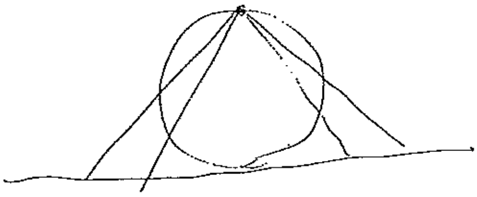
a b

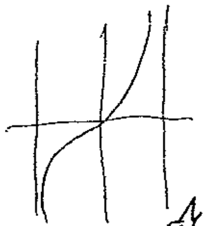
oppure

$I \simeq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\|\!\wr\ \ tg$

$\mathbb{R}$





★ coord. sferiche generalizzate

$0 \leq r < 1$

Ora

$0 \to r = 0$

$$\begin{cases} x_1 = r \cos\vartheta_1 \dots \cos\vartheta_{n-1} \\ x_2 = r \cos\vartheta_1 \dots \sin\vartheta_{n-1} \\ x_3 = r \cos\vartheta_1 \dots \cos\vartheta_{n-2} \\ x_4 = r \cos\vartheta_1 \dots \sin\vartheta_{n-2} \\ \vdots \\ x_n = r \sin\vartheta_1 \end{cases}$$

$\vartheta_{n-1} \in [0, 2\pi)$

$\vartheta_i \in [0, \pi]$

$i = 1, 2, \dots n-2$

e si conclude.

★ oppure si lavora con cubi..  $\simeq$  $\simeq \mathbb{R}^n$