

I momenti

Data una variabile X diremo momento di potenza di ordine r dall'origine A la Media aritmetica delle erresime potenze degli scarti fra ogni valore assunto dalla variabile e la costante A . Analiticamente avremo:

$${}_A\mu_r = M \left[(x - A)^r \right]$$

I momenti dall'origine

Si ricavano dall'espressione generale dei momenti ponendo $A=0$. In questo caso il deponente, collocato sulla sinistra della lettera greca μ , viene omissso:

$$\mu_r = M \left[(x)^r \right]$$

E rappresenta la media delle erresime potenze dei dati.

I momenti centrali

Sono la media delle erresime potenze degli scarti centrati sulla media aritmetica: rappresentano dunque lo sviluppo della formula generale per $A=m$:

$${}_m\mu_r = M \left[(x - m)^r \right]$$

I **momenti centrali** si possono determinare in funzione dei **momenti dall'origine**:

$${}_m\mu_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \mu_{r-i} m^i$$

In particolare:

- **momento centrale** di ordine **3** in funzione dei **momenti dall'origine**:

$${}_m\mu_3 = {}_0\mu_3 - 3 {}_0\mu_2 m + 2 m^3$$

- **momento centrale** di ordine **4** in funzione dei **momenti dall'origine**:

$${}_m\mu_4 = {}_0\mu_4 - 4 {}_0\mu_3 m + 6 {}_0\mu_2 m^2 - 3 m^4$$

ESERCIZIO

Dati i seguenti valori: 1, 2, 4, 6, 7

- calcolare il momento centrale di ordine 3 e il momento centrale di ordine 4;
- verificare le relazioni esistenti fra tali momenti e i momenti dall'origine.

SOLUZIONI

$$a) \quad {}_m\mu_3 = M[(x-m)^3] = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^3}{n} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - 4)^3}{5} = 0$$

$${}_m\mu_4 = M[(x-m)^4] = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^4}{n} = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - 4)^4}{5} = 194/5 = 38,8$$

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{5} = 20/5 = 4$$

x	x-4	(x-m) ³	(x-m) ⁴	x ²	x ³	x ⁴
1	-3	-27	81	1	1	1
2	-2	-8	16	4	8	16
4	0	0	0	16	64	256
6	2	8	16	36	216	1296
7	3	27	81	49	343	2401
20		0	194	106	632	3970

$$b) \quad {}_m\mu_3 = {}_0\mu_3 - 3 {}_0\mu_2 m + 2 m^3 = 126,4 - 3*(21,2)*4 + 2*(4)^3 = 126,4 - 254,4 + 128 = 0$$

$${}_m\mu_4 = {}_0\mu_4 - 4 {}_0\mu_3 m + 6 {}_0\mu_2 m^2 - 3 m^4 = 794 - 4*(126,4)*4 + 6*(21,2)*(4)^2 - 3*(4)^4 = 38,8$$

INDICI DI FORMA

La forma di una distribuzione si studia attraverso l'analisi della **SIMMETRIA** e dell'**APPIATTIMENTO**.

INDICI DI ASIMMETRIA

Definizione: Una distribuzione di frequenze $f(x)$ si dice **simmetrica** rispetto ad una asse di simmetria x_0 se sussiste la seguente relazione:

$$f(x_0-h) = f(x_0+h) \text{ (per ogni valore di } h\text{)}$$

Nelle distribuzioni unimodali, se la distribuzione è simmetrica allora la Media Aritmetica e la Mediana della distribuzione coincidono ($M(X) = Med(X)$).

Inoltre:

- Se la distribuzione è obliqua a sinistra (asimmetria negativa) allora $M(X) < Moda(X)$.
- Se la distribuzione è simmetrica (simmetria) allora $M(X) = Med(x) = Moda(X)$.
- Se la distribuzione è obliqua a destra (asimmetria positiva) allora $M(X) > Moda(X)$.

Coefficiente di Skewness o Indice di Asimmetria di Pearson

$$S_k = \frac{m - MODA}{\sigma}$$

Si tratta di un indice normalizzato, che assume valori nell'intervallo $[-1, +1]$.

Se $S_k > 0$ c'è asimmetria POSITIVA.

Se $S_k = 0$ c'è simmetria.

Se $S_k < 0$ c'è asimmetria negativa.

Indice di Asimmetria di Fisher

L'Indice di Asimmetria di Fisher è definito come la Media aritmetica delle terze potenze della variabile standardizzata:

$$\alpha_1 = M(u^3) = M\left[\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)^3\right] = \frac{m\mu_3}{\sigma^3}$$

Se $\alpha_1 > 0$ c'è asimmetria POSITIVA.

Se $\alpha_1 = 0$ c'è simmetria.

Se $\alpha_1 < 0$ c'è asimmetria NEGATIVA.

N.B.: Spesso in letteratura tale *Indice di Asimmetria di Fisher* viene indicato con il simbolo γ_1 (anche nel testo di Olivieri, "Fondamenti di Statistica", l'*Indice di Asimmetria di Fisher* viene indicato con il simbolo γ_1).

Attenzione: l'Indice di Asimmetria α_2 Definizione 6.3 – formula (6.2) di pag. 165 del testo di Cicchitelli **non** fa parte del Programma.

INDICI DI APPIATTIMENTO O CURTOSI

L'appiattimento è un altro aspetto della forma di una distribuzione che riguarda il peso più o meno accentuato delle code rispetto alla parte centrale della distribuzione.

Per la distribuzione NORMALE si dimostra che vale la relazione:

$${}_m\mu_4 = 3\sigma^4$$

Da cui

$$\frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} = 3$$

Mentre si dimostra che

- Se la distribuzione è IPERNORMALE o LEPTOCURTICA allora $\frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} > 3$;
- Se la distribuzione è IPONORMALE o PLATICURTICA allora $\frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} < 3$.

Indice di Curtosi di Pearson

L'Indice di Curtosi di Pearson è definito come la Media aritmetica delle quarte potenze della variabile standardizzata:

$$\beta_2 = M(u^4) = M\left[\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^4\right] = \frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4}$$

Se $\beta_2 < 3$ la distribuzione è IPONORMALE.

Se $\beta_2 = 3$ la distribuzione è NORMALE.

Se $\beta_2 > 3$ la distribuzione è IPERNORMALE.

Indice di Curtosi di Fisher

$$\gamma = \beta_2 - 3 = \frac{m\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Se $\gamma < 0$ la distribuzione è IPONORMALE.

Se $\gamma = 0$ la distribuzione è NORMALE.

Se $\gamma > 0$ la distribuzione è IPERNORMALE.

N.B.: Spesso in letteratura tale *Indice di Curtosi di Fisher* viene indicato con il simbolo γ_2 (anche nel testo di Olivieri, “Fondamenti di Statistica”, l’*Indice di Curtosi di Fisher* viene indicato con il simbolo γ_2).

ESERCIZIO

Valutare la simmetria e l'appiattimento della seguente distribuzione:

x	f(x)
2	20
4	40
6	80
8	200
10	60

SOLUZIONI

La simmetria si può valutare indifferentemente con uno dei seguenti indici: *Indice di Skewness* S_k (se la distribuzione presenta la Moda) o α_1 .

$$S_k = \frac{m - MODA}{\sigma} = \frac{7,2 - 8}{2,04} = -0,39216$$

Essendo diverso da zero e negativo significa che la distribuzione è asimmetrica e obliqua a sinistra (: asimmetria negativa).

x	f(x)	x*f(x)	(x-m) ² *f(x)
2	20	40	540,8
4	40	160	409,6
6	80	480	115,2
8	200	1600	128
10	60	600	470,4
	400	2880	1664

$$m = M(x) = 2880/400 = 7,2$$

MODA(x)=8 cui corrisponde la max frequenza.

$$\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{1664/400} = \sqrt{4,16} = 2,04$$

x	f(x)	(x-7,2) ³ *f(x)
2	20	-2812,16
4	40	-1310,72
6	80	-138,24
8	200	102,4
10	60	1317,12
	400	-2841,6

$${}_m\mu_3 = (-2841,6)/400 = -7,104$$

$$\alpha_1 = \frac{{}_m\mu_3}{\sigma^3} = (-7,104)/(2,04)^3 = -0,8373$$

Essendo diverso da zero e negativo significa che la distribuzione è asimmetrica e obliqua a sinistra (: asimmetria negativa).

L'appiattimento si può valutare indifferentemente con uno dei seguenti indici: β_2 oppure γ .

$$\beta_2 = \frac{{}_m\mu_4}{\sigma^4} = \frac{56,8832}{(2,04)^4} = 3,287$$

Essendo maggiore di 3 significa che la distribuzione è leggermente ipernormale.

x	f(x)	$(x-7,2)^4 * f(x)$
2	20	14623,232
4	40	4194,304
6	80	165,888
8	200	81,92
10	60	3687,936
	400	22753,3

$${}_m\mu_4 = 22753,3/400 = 56,8832$$

$$\gamma = \beta_2 - 3 = 0,28$$

Essendo maggiore di 0 significa che la distribuzione è leggermente ipernormale.