

Esercizi per il Corso di ALGEBRA

Foglio 3

20 ottobre 2015

1. **(3 punti)** Sia G un gruppo e H un sottogruppo di G . Si dimostri che se l'indice di H in G è 2, allora H è un sottogruppo normale di G .
2. Sia D_n ($n \geq 3$) il gruppo formato dalle isometrie del piano che lasciano immutati i poligoni regolari a n lati.
 - (a) **(4 punti)** Si dimostri che D_n ha $2n$ elementi e che D_n è generato da una riflessione e una rotazione di angolo $2\pi/n$.
 - (b) Si consideri il sottogruppo H di S_4 generato dagli elementi (1234) e $(12)(34)$.
 - i. **(3 punti)** Si calcolino tutti gli elementi di H .
 - ii. **(4 punti)** Si dimostri che H è isomorfo a D_4 .
3. Si dimostri che i seguenti gruppi sono risolubili:
 - (a) **(4 punti)** il gruppo simmetrico su 4 oggetti S_4 ;
 - (b) **(4 punti)** il gruppo $G \times H$, se G e H sono gruppi risolubili;
 - (c) **(4 punti)** il gruppo $T_n(\mathbb{C})$ delle matrici triangolari superiori $n \times n$ a coefficienti in \mathbb{C} ;
 - (d) **(4 punti)** il gruppo diedrale D_n , per ogni $n \geq 3$. (**Suggerimento:** Si consideri il sottogruppo generato dalla rotazione di angolo $2\pi/n$.)

Consegna: martedì 27 ottobre, 15:30, all'inizio delle esercitazioni.