ANALISI MATEMATICA II
-QUARTO FOGLIO DI ESERCIZI-
AA 2015-2016

GIULIA CAVAGNARI

Esercizio 1 (5 pt.). Calcolare il volume della regione di spazio limitata dal paraboloide $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ e dal generico piano passante per il fuoco del paraboloide. Si determini il piano per cui tale area risulta minima.

Esercizio 2 (5 pt.). Calcolare il baricentro della regione di spazio

$$V = \left\{ x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \right\},$$

dove $a, b, c > 0$.

Esercizio 3 (3 pt.). Dopo averne rappresentato i domini di integrazione, si inverta l'ordine di integrazione in ciascuno dei seguenti integrali.

$$\int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)\, dy \right) dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin x} f(x,y)\, dy \right) dx,$$

$$\int_1^2 \left(\int_0^{\log x} f(x,y)\, dy \right) dx, \qquad \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\, dx \right) dy,$$

$$\int_0^1 \left(\int_{\arctan x}^{\pi/4} f(x,y)\, dy \right) dx, \qquad \int_0^1 \left(\int_{\arcsin y}^{\pi/2} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Esercizio 4 (5 pt.). Calcolare la lunghezza del tratto di curva dei grafici delle funzioni $f_1(x) := x^2$, $f_2(x) := e^x$, $f_3(x) := \sinh x$, $f_4(x) := \cosh x$ con $x \in [0, 1]$.

Esercizio 5 (5 pt.). Sia $R > 0$ e S_R la semisfera $S_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$. A quale altezza h_V si deve far passare un piano parallelo al piano xy in modo che tagli S_R in due parti di ugual volume? A quale altezza h_S per avere invece uguale superficie laterale?

Esercizio 6 (7 pt.). Rappresentare il dominio di integrazione dei seguenti integrali e calcolarli:

$$I_1 := \iint_{\Omega_1} \frac{|y|}{(x^2+y^2)^2}\, dx\, dy, \qquad \text{con } \Omega_1 := \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4x,\ |y| \leq \sqrt{3}x\};$$

$$I_2 := \iint_{\Omega_2} y e^{y^2+x}\, dx\, dy, \qquad \text{con } \Omega_2 := \{0 \leq x \leq 2y^2,\ 0 \leq y \leq 1\};$$

$$I_3 := \iint_{\Omega_3} (1 + 4(x^2+y^2))\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy, \qquad \text{con } \Omega_3 := \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\};$$

$$I_4 := \iint_{\Omega_4} \frac{x e^{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{x^2+y^2}\, dx\, dy, \qquad \text{con } \Omega_4 := \{|x| \leq y \leq 1\};$$

$$I_5 := \iiint_{\Omega_5} \frac{x^2+y^2}{z^2}\, dx\, dy\, dz, \qquad \text{con } \Omega_5 := \left\{ x^2 + y^2 \leq 1,\ \frac{1}{x^2+y^2} \leq z \leq \frac{2}{x^2+y^2} \right\};$$

$$I_6 := \iint_{\Omega_6} (1 + x)\, dx\, dy, \qquad \text{con } \Omega_6 := \{y \geq |x|,\ y < \frac{1}{2}x + 2\};$$

$$I_7 := \iint_{\Omega_7} (x^2 - y^2) \log(1 + (x+y)^4)\, dx\, dy, \qquad \text{con } \Omega_7 := \{x > 0,\ 0 < y < 2 - x\}.$$

Consegna entro: giovedì 19 novembre 2015

E-mail address: giulia.cavagnari@unitn.it

Date: 19 ottobre 2015.