Dinamica di sistemi di punti materiali.

Sistema discreto: $S = \{ m_i, i = 1 \dots N\}$
Sistema continuo: $S=\int_M dm=\int_V \rho(r)dV$, essendo $\rho(r)=dm/dV$

NB: Sappiamo che per il punto materiale valgono le seguenti relazioni fra le grandezze dinamiche $\mathbf{p}$, E_k e $\mathbf{L}_O$ e la $\mathbf{F}_R = \sum_1^k{}_i \mathbf{F}_i$:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \qquad d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}_R = \sum_1^k{}_i \mathbf{F}_i$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2, \qquad dE_k = dW = \mathbf{F}_R \cdot d\mathbf{r} = \sum_1^k{}_i \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r}\wedge\mathbf{p} \qquad d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{r}\wedge\mathbf{F}_R = \mathbf{r}\wedge(\sum_1^k{}_i \mathbf{F}_i)$$

Ci proponiamo di generalizzare i risultati relativi alla dinamica di un punto materiale ai sistemi di particelle.

Equazione del moto della particella i–ma (<u>*legge di Newton*</u>):

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} \qquad (1)$$

Forza risultante agente sulla particella i–ma come risultante di forze interne $\mathbf{F}_i^{(I)}$ e delle forze esterne $\mathbf{F}_i^{(E)}$ al sistema S

<u>Forze esterne e forze interne</u>: $\mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}$,

$$\mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_1^N{}_j \mathbf{F}_{ij}^{(i)} \qquad [\text{N.B.: } \mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji},]$$

$$\mathbf{F}_i^{(E)} = \sum_1^R{}_k \mathbf{F}_{ik}^{(e)}$$

Vale il principio di azione/reazione, per cui $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{-}\,\mathbf{F}_{ji}$.

Equazione del moto della singola particella i–ma:

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(R)} = \mathbf{F}_i^{(E)} + \mathbf{F}i^{(I)} = \mathbf{F}^{(E)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i, t) + \mathbf{F}^{(I)}(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{v}_{ij}, t)$$

cioé un'equazione differenziale funzione di (Nr_i+Nv_i+t).

Per un sistema di N particelle si ottiene un sistema di N equazioni vettoriali di Newton, che danno origine a 3N equazioni scalari di Newton in 6N+1 incognite ($N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t$).

Impossibile risolvere sistemi di 3N equazioni di Newton in 6N+1 incognite ($N\mathbf{r}_i+N\mathbf{v}_i+t$)!

Cosa si può fare o si sa con i sistemi di punti materiali? La descrizione del moto del sistema di particelle nel suo complesso attraverso la definizione di grandezze dinamiche collettive.

In tale modo si otterrà una descrizione del moto del sistema nel suo insieme, piuttosto che del moto delle singole particelle.

Grandezze collettive = riferite a tutto S: $\sum_i F_i^{(R)}$, $\sum_i \mathbf{p}_i$, $\sum_i E_{k,i}$, $\sum_i L_{O,i}$

$$\sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i \left[\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}\right] = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)}$$

$$\mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i \mathbf{p}_i = \sum_1^N{}_i (m_i \mathbf{v}_i)$$

$$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i E_{k,i} = \sum_1^N{}_i (½ m_i v_i^2)$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i)$$

Analogamente al caso del punto materiale, cercheremo di capire cosa indicano e di dare un senso alle relazioni seguenti:

$$d\mathbf{P}s/dt = \mathbf{?}$$

$$dE_{k,S} = ?$$

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \mathbf{?}$$

Calcolo della risultante di tutte le forze, interne ed esterne, agenti sul sistema S, a partire dall'equazione del moto (1):

$$\sum_1^N{}_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i \left[\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}\right] =$$
$$= \sum_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

essendo $\mathbf{F}^{(INT)} = \mathbf{0}$ in conseguenza del principio di azione-reazione, i.e.: $\mathbf{F}_{ij} = - \mathbf{F}_{ji}$. Infatti si può dimostrare che:

$$\sum_{1}^{N}{}_{i} \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{1}^{N}{}_{i} [\sum_{1}^{N}{}_{j} \mathbf{F}_{ij}] = \sum_{1}^{N}{}_{ij\ (j\neq i)} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{0}$$

Per un sistema di due particelle: $\mathbf{F}_{21} = - \mathbf{F}_{12}$ si ha infatti:

$$\sum_{1}^{2}{}_{ij\ (j\neq i)} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} + (- \mathbf{F}_{12}) = \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0}.$$

Per un sistema di tre particelle: $\mathbf{F}_{ji} = - \mathbf{F}_{ij}$ si ha infatti:

$$\sum_{1}^{3}{}_{ij\ (j\neq i)} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + (- \mathbf{F}_{12}) + \mathbf{F}_{23} + (- \mathbf{F}_{13}) + (- F_{23}) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{23} - \mathbf{F}_{13} - \mathbf{F}_{23} = \mathbf{0}.$$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

In definitiva la risultante di tutte le forze:

$$\sum_{1}^{N}{}_{i}\, m_i\mathbf{a}_i = \sum_{1}^{N}{}_{i} [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \sum_i \mathbf{F}_i^{(I)} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}_S^{(R)}$$

Cioè:

$$\sum_{1}^{N}{}_{i}\, m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_S^{(R)} \qquad (2)$$

La risultante delle forse esterne che agiscono su un sistema di particelle <u>è formalmente identica</u> ($\mathbf{F}_S^{(R)}$) alla risultante di un sistema di forze agenti sul punto materiale, per cui vale la legge di Newton. E' pensabile di trattare il sistema S come una super particella per cui si possa scrivere una relazione equivalente alla II legge della dinamica del punto materiale ($m\mathbf{a} = \mathbf{F}_R$)?

Per la massa M_S del sistema S non c'è problema: $M_S = \sum_{1}^{N}{}_{i}\, m_i$.

Per l'accelerazione bisogna fare riferimento alla <u>media ponderata delle accelerazioni delle singole particelle</u>, che è definita più sotto, come conseguenza dell'introduzione del concetto di centro di massa o baricentro del sistema di particelle.

Centro di massa di un sistema di particelle.

Definizione e proprietà: Posizione del CM

$\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{r}_i / \sum_1^N{}_i\ m_i$ ($x_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ x_i / \sum_1^N{}_i\ m_i$, $y_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ y_i / \sum_1^N{}_i\ m_i$, $z_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ z_i / \sum_1^N{}_i\ m_i$)

<u>In pratica</u>: $M\ \mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{r}_i$.

N.B. Il CM è una proprietà intrinseca del sistema. La posizione del CM $\mathbf{r}_{CM}$ è quindi indipendente dal sistema Oxyz, mentre le sue coordinate (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) dipendono dal sistema Oxyz scelto.

Il caso di due particelle poste a distanza *d* l'una dall'altra:

Sistema O′x′ tale che m_1 si trovi in O′ e m_2 in $x_2 = 0 + d$

$$x'_{CM} = [m_1\ 0 + m_2\ d] / [m_1 + m_2] = m_2\ d/[m_1 + m_2]$$

Sistema Ox tale che m_1 si trovi in x_1 e m_2 in $x_2 = x_1 + d$:

$$\begin{aligned} x_{CM} &= [m_1\ x_1 + m_2\ x_2] / [m_1 + m_2] = \\ &= [m_1\ x_1 + m_2\ (x_1 + d)] / [m_1 + m_2] \\ &= x_1 + m_2\ d/(m_1+m_2) = x_1 + x'_{CM} \end{aligned}$$

E quindi in notazione vettoriale: $\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}'_{CM}$

<u>Velocità e accelerazione del CM</u>:

1) $\mathbf{v}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{v}_i / \sum_i m_i$ ($v_{X,CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ v_{xi} / \sum_1^N{}_i\ m_i$, etc.)

2) $\mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{a}_i / \sum_i m_i$ ($a_{X,CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ a_{xi} / \sum_1^N{}_i\ m_i$, etc.)

<u>In alternativa</u> $\mathbf{v}_{CM}$ e $\mathbf{a}_{CM}$ si ottengono da $M\mathbf{r}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{r}_i$:

1') $M\ \mathbf{v}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{v}_i$ direttamente da $M d\mathbf{r}_{CM}/dt = \sum_1^N{}_i\ m_i\ (d\mathbf{r}_i/dt)$

2') $M\ \mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\ m_i\ \mathbf{a}_i$ direttamente da $M d\mathbf{v}_{CM}/dt = \sum_1^N{}_i\ m_i\ (d\mathbf{v}_i/dt)$

Sistema di PM isolato: (i.e.: non ci sono forze esterne: $\Rightarrow \mathbf{F}_{ik}^{(e)} = 0$)
– conservazione della quantità di moto $\mathbf{P}_S$ di S: $\mathbf{P}_S$ = costante
– conservazione del momento della quantità di moto totale $\mathbf{L}_{O,S}$ del sistema S rispetto al polo O: $\mathbf{L}_{O,S}$ = costante.

N.B.: Si tratta di due fatti sperimentali facilmente verificabili.

$\mathbf{P}_S = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{p}_i = \sum_1^N{}_i\, m_i \mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{CM} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} = \text{costante!}$

$\mathbf{L}_{O,S} = \text{costante} \Rightarrow \mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i\ \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i = \text{costante!}$

Quantità di moto totale di un sistema S isolato

Nel caso in cui non agiscono forze esterne la quantità di moto totale del sistema di punti materiali si conserva durante il moto:

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S = \text{costante.}$$

Esempi di conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle libero dall'azione di forze esterne;

Conservazione di una delle componenti (x) della quantità di moto totale del sistema isolato, quando non agiscono forze esterne in x:

$$Mv_{CM,X} = P_{S,X} = \text{costante durante il moto.}$$

I casi in cui si conserva una sola componente:
– granata che esplode in aria,
– uomo che si sposta su una piattaforma posta su un piano liscio;
– moto di un corpo di massa m su un cuneo di massa M, appoggiato a un piano orizzontale liscio: $0 = m\, v_x + M\, V_x$

Quantità di moto totale di un sistema S non-isolato

Sistema di punti materiali non–isolato: $\mathbf{F}_{ik} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_i^{(E)} \neq 0$

$$M\mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_S \text{ non è più costante, ma } \mathbf{P}_S(t)$$

Relazione fra la derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema e la risultante delle forze agenti sulle particelle dei sistema:

$$d\mathbf{P}_S/dt = d(\sum_i \mathbf{p}_i)/dt = \sum_i (d\mathbf{p}_i/dt) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(R)}$$

$$= \sum_1^N{}_i [\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}] = \mathbf{F}^{(INT)} + \mathbf{F}^{(EXT)} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

essendo $F^{(INT)} = 0$, per il principio di azione–reazione.

I[a] Legge cardinale della dinamica dei sistemi: in un sistema di riferimento inerziale o del laboratorio (sistema L) si ha:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)}$$

Tale legge si può anche scrivere come: $M\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$, nota anche come teorema del centro di massa del sistema, dato che dalla (2):

$$\sum_1^N{}_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} \text{ o equivalentemente } \Rightarrow M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II[a] legge cardinale della dinamica dei sistemi:

Esiste una seconda legge della dinamica di sistemi che correla la derivata del momento della quantità di moto totale del sistema S rispetto al polo O alla somma dei momenti delle forze esterne rispetto ad O.

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{L}_{O,S}/dt &= d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i)/dt = \\
&= \sum_1^N{}_i [d(\mathbf{r}_i/dt) \wedge m_i\mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \wedge d(m_i\mathbf{v}_i)/dt] = \\
&= \sum_1^N{}_i [\mathbf{v}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{a}_i] = \sum_1^N{}_i [\mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})] = \\
&= \sum_1^N{}_i (\mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)}) + \sum_1^N{}_i (\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(E)}) = \\
&= \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} + \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}
\end{aligned}$$

essendo: $\mathbf{v}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i$ e $\boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)}$ (vedi più sotto).

Consideriamo d$\mathbf{L}_{O,S}$ /dt in due situazioni particolari:

1) Sistema isolato (i.e.: $\mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$): sappiamo che il $\mathbf{L}_{O,S}$ si conserva:

$\mathbf{L}_{O,S}$ = costante $\Rightarrow \mathbf{L}_{O,S} = \sum_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i$ = costante!

In tal caso il teorema del momento angolare dà d$\mathbf{L}_{O,S}$ /dt = **0.**

$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, d\mathbf{L}_{O,i}/dt = \sum_1^N{}_i \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i} = \sum_1^N{}_i \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(R)} = \sum_1^N{}_i \sum_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$

ma dato che non ci sono forze esterne $\mathbf{F}_{ik} \Rightarrow \mathbf{F}_i^{(E)} = \mathbf{0}$, si avrà pure:

$$\mathbf{0} = d\mathbf{L}_{O,S}/dt = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{Oi}^{(I)} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistema isolato: risultante dei momenti delle forze interne = **0**,

N.B.: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$

Infatti per un sistema di due particelle (o sistema di due corpi):

$\sum_1^2{}_i \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21}] = \frac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0}$

mentre, per un sistema di tre particelle si avrà:

$$\begin{aligned}
&\sum_1^3{}_i \sum_i \boldsymbol{\tau}_{O,i} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i \wedge \sum_{j\,(j\neq i)} \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \\
&= \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}_{32} = \\
&= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{F}_{12} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{13} + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \wedge \mathbf{F}_{23} = \\
&= \mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} = \\
&= \tfrac{1}{2} [\mathbf{r}_{12} \wedge \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_{21} \wedge \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_{13} \wedge \mathbf{F}_{13} + \mathbf{r}_{31} \wedge \mathbf{F}_{31} + \mathbf{r}_{23} \wedge \mathbf{F}_{23} + \mathbf{r}_{32} \wedge \mathbf{F}_{32}] = \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{i,j\,(j\neq i)} \mathbf{r}_{ij} \wedge \mathbf{F}_{ij}^{(I)} = \mathbf{0} \\
&= \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

E così via per N = 4, 5, 6, ….

2) Se il sistema non è isolato allora $d\mathbf{L}_{O,S}/dt \neq \mathbf{0}$, e si ha che:

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)})$$

$$= \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} + \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$$

Cioè: $d\mathbf{L}_{O,S}/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_O^{(EXT)}$

Principio di azione–reazione per i sistemi di punti materiali:

Le due leggi cardinali della dinamica dei sistemi di punto materiali sanciscono che, indipendentemente dal fatto che il sistema S sia isolato oppure no, la risultante delle forze interne $\mathbf{F}^{(INT)} = \mathbf{0}$ e il momento risultante dei momenti delle forze interne $\boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = \mathbf{0}$.
Cioè:

$$\mathbf{F}^{(INT)} = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{0};$$

e

$$\boldsymbol{\tau}_O^{(INT)} = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{O,i}^{(I)} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i^{(I)} = \mathbf{0}.$$

Sistema L: Le due leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a:

$$M\,\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_{O,S}/dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Le due leggi ricavate più sopra valgono in un sistema Oxyz (L).

Sistema C: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi.

Sistema C: Sistema di riferimento del centro di massa.

Si tratta di un sistema CMxyz, ancorato al CM del sistema S e avente gli assi cartesiani paralleli agli assi x,y,z di Oxyz (L).

Calcolo della quantità: $\mathbf{r}'_{CM} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{r}'_i = M\mathbf{r}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{v}'_{CM} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$;

Calcolo della quantità: $\mathbf{a}'_{CM} \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{a}'_i = M\mathbf{a}'_{CM} = \mathbf{0}$.

Calcolo delle grandezze dinamiche: $\mathbf{P}'_S$, $E'_{S,k}$ e $\mathbf{L}'_{CM}$.

$\mathbf{P}'_S = \sum_1^N{}_i \mathbf{p}'_i = \sum_1^N{}_i m_i \mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}'_{CM} = \mathbf{0}$;

$E'_{k,S} = \sum_1^N{}_i E'_{k,i} = ½ \sum_1^N{}_i m_i v'^2_i = ½ \sum_1^N{}_i (p'^2_i/m_i)$

$\mathbf{L}'_{CM,S} = \sum_1^N{}_i \mathbf{L}'_{CM,i} = \sum_1^N{}_i \mathbf{r}'_i \wedge m_i \mathbf{v}'_i$

Proprietà del sistema del centro di massa CMxyz (Sistema C)

Sistema C = sistema a quantità di moto totale nulla:

$\mathbf{P}'_S = 0$ (con dimostrazione).

Leggi cardinali della dinamica nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = 0$, ma ….

$$d\mathbf{P}'_S/dt = \sum_i \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}$.

N.B.: Vale il teorema del momento angolare rispetto al CM assunto come polo (anche se CM non è fisso ma è in moto, anche accelerato). In tal caso il sistema CMxyz è un sistema di riferimento non-inerziale (SRN-I).

Riassumendo: Leggi cardinali della dinamica dei sistemi:

Nel sistema L:

I^a Legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{P}_S/dt = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)};$$

equivalente a:

$$M\, \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{F}^{(EXT)}$$

II^a legge cardinale della dinamica dei sistemi:

$$d\mathbf{L}_O /dt = d(\sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i})/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{0,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_0^{(EXT)}.$$

Nel sistema C:

– I^a legge cardinale: $M\mathbf{a}'_{CM} = 0$, ma …

$$d\mathbf{P'}_S/dt = \sum_1^N{}_i \mathbf{F}_i^{(E)} - M\mathbf{a}_{CM} = 0$$

– II^a legge cardinale: $d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i \boldsymbol{\tau}_{CM,i}^{(E)} = \boldsymbol{\tau}_{CM}^{(EXT)}$.

Energia cinetica di un sistema S di particelle:

Un'altra importante grandezza collettiva del sistema S è la sua energia cinetica, che per definizione è la somma delle energie cinetiche delle particelle individuali.

Pertanto, nel sistema L, o sistema Oxyz,t ancorato in O:

$$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i\, E_{k,i} = \sum_1^N{}_i\, \tfrac{1}{2} m_i v_i^2.$$

mentre, nel sistema C, o sistema CMxyz,t, ancorato in CM:

$$E'_{k,S} = \sum_1^N{}_i\, E'_{k,i} = \sum_1^N{}_i\, \tfrac{1}{2} m_i v'^2_i$$

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}^{INT}$

Relazioni o teoremi di Konig

Relazione fra le grandezze dinamiche collettive (quantità di moto, momento delle quantità di moto, energia cinetica) del sistema S di punti materiali calcolate nel sistema L e nel sistema C:

Teoremi di Konig: della quantità di moto, del momento della quantità di moto, e dell'energia cinetica.

– quantità di moto: $\mathbf{P}_S = M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P}'_S = M\mathbf{v}_{CM}$, perché $\mathbf{P}'_S = 0$

N.B.: Dimostrazione:

$\mathbf{P}_S = \sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{v}_i = \sum_1^N{}_i\, m_i\,(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) = (\sum_1^N{}_i m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{v}'_i = M\mathbf{v}_{CM}$

– momento della quantità di moto o momento angolare del sistema S: $\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

N.B.: Dimostrazione:

$\mathbf{L}_{O,S} = \sum_1^N{}_i \mathbf{L}_{O,i} = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i \wedge m_i\mathbf{v}_i = \sum_1^N{}_i\, (\mathbf{r}_{CM}+\mathbf{r}'_i) \wedge m_i(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v}'_i) = \sum_1^N{}_i$
$\mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}'_i + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}'_i$
$= \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_1^N{}_i\, m_i)\mathbf{v}_{CM} + \sum_1^N{}_i\, \mathbf{L}'_{CM,i} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{L}'_{CM,S}$

perchè: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}'_i \wedge m_i\mathbf{v}_{CM} = (\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{r}'_i) \wedge \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{0}$
e così pure: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_{CM} \wedge m_i\mathbf{v}'_i = \mathbf{r}_{CM} \wedge (\sum_1^N{}_i\, m_i\mathbf{v}'_i) = \mathbf{0}$.

<u>Nota Bene:</u> Altre proprietà del momento angolare:

Dalla relazione fra i momenti angolari del sistema S calcolati rispetto al polo fisso O e rispetto a un punto O', si dimostra che il teorema del momento angolare vale oltre che per O' fisso, anche quando O' non è fisso purché però O' sia coincidente con il CM del sistema di punti materiali.

Validità del teorema del momento angolare rispetto al CM, calcolato usando sia le grandezze in L che in C:

$$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)},$$

Dimostrazione:

$d\mathbf{L}_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, r'_i \wedge m_i\mathbf{a}_i = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)}$

e

$d\mathbf{L}'_{CM,S}/dt = \sum_1^N{}_i\, r_i' \wedge m_i\mathbf{a}'_i = \sum_1^N{}_i\, r_i' \wedge(\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)} - m_i\mathbf{a}_{CM}) =$
$= \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i' \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} + \mathbf{F}_i^{(E)}) = \sum_1^N{}_i\, \mathbf{r}_i' \wedge \mathbf{F}_i^{(E)},$

perchè: $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge (\mathbf{F}_i^{(I)} = 0$ e $\sum_1^N{}_i\, \mathbf{r'}_i \wedge m_i\mathbf{a}_{CM} = \sum_1^N{}_i\, (m_i\mathbf{r'}_i) \wedge \mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$

–dell'energia cinetica: $E_{k,S} = ½\, Mv_{CM}^2 + E_{k,S}' = E_{k,CM} + E_{k,S}^{INT}$

Dimostrazione:

$E_{k,S} = \sum_1^N{}_i\, E_{k,i} = ½ \sum_1^N{}_i\, m_i\, v_i^2 = ½ \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = ½ \sum_1^N{}_i\, m_i$ $(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v'}_i)\cdot(\mathbf{v}_{CM}+\mathbf{v'}_i) = ½ \sum_1^N{}_i\, m_i\, v_{CM}^2 + \sum_1^N{}_i\, m_i\, \mathbf{v'}_i \cdot \mathbf{v}_{CM} + ½ \sum_1^N{}_i\, m_i$ $v'^2_i = ½\, Mv_{CM}^2 + E_{k,S}'$.

<u>Teoremi di Konig</u>: Consentono la scomposizione del moto del sistema nel moto orbitale + moto intrinseco o interno.

Esempi: moto della luna attorno alla terra = moto orbitale di un punto materiale di massa M con velocità v_{CM} + moto intrinseco, proprio del sistema e indipendente dal sistema di riferimento usato per l'osservazione.

Cosa succede all'energia meccanica del sistema S?

Energia cinetica di un sistema S di particelle e lavoro delle forze interne ed esterne agenti sul sistema S di particelle.

Energia cinetica di un sistema S di particelle:

$E_{k,S} = \sum_1{}^N{}_i \sum_i E_{k,i} = \sum_1{}^N{}_i$ ½ $m_i\, v_i{}^2$. (nel sistema L, ancorato in O)

$E'_{k,S} = \sum_1{}^N{}_i E'_{k,i} = \sum_1{}^N{}_i \sum_i$ ½ $m_i\, v'_i{}^2$ (nel sistema C, ancorato a CM)

$E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}{}^{INT}$

<u>Lavoro delle forze agenti su un sistema di particelle</u>:

Lavoro delle forze interne ($dW^{INT} = \sum_i dW^{(I)}{}_i = \sum_i \mathbf{F}_i{}^{(I)}\bullet d\mathbf{r}_i$) e delle forze esterne ($dW^{EXT} = \sum_i dW^{(E)}{}_i = \sum_i \mathbf{F}_i{}^{(E)}\bullet d\mathbf{r}_i$).

Il teorema dell'energia di un sistema di particelle:

$$\Delta E_{k,S} = E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W^{EXT} + W^{INT}.$$

Se le forze interne sono conservative, allora si può definire una funzione energia potenziale delle forze interne:

$E_P{}^{INT} = ½\sum_{i,j}{}^{(i\neq j)}$ Ep,int $(\mathbf{r}_{ij})$, con $E_p,{}^{int}$ $(\mathbf{r}_{ij}) = \mathbf{F}^{(i)}(\mathbf{r}_{ij})^\bullet d\mathbf{r}_{ij}$, e $dE_P{}^{INT} =$ $-$ ½$\sum_{ij} \mathbf{F}^{(i)}(r_{ij})^\bullet d\mathbf{r}_{ij}$, $= - \sum_1{}^N{}_i\, dWi^{(i)} = - dW^{INT}$.

$E_{k,S,B} - E_{k,S,A} = W^{EXT} - \Delta E_P{}^{INT}$, ossia $\Delta E_{k,S} + \Delta E_P{}^{INT} = W^{EXT}$

Definizione di Energia propria $U_S = E_{k,S} + E_P{}^{INT}$.

Vale la relazione $\Delta(E_{k,S} + E_P{}^{INT}) = W^{EXT}$, ossia $\Delta U = W^{EXT}$

Se poi anche le forze esterne sono conservative, e quindi si può definire un'energia potenziale delle forze esterne:

$$dE_P^{EXT} = -\sum_1^N{}_i\, \mathbf{F}_i^{(E)}\cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_1^N{}_i\, dW_i^{(E)} = -dW^{EXT},$$

allora si potrà scrivere: $\Delta U = -\Delta E_P^{EXT}$,
e quindi $\Delta(U + E_P^{EXT}) = 0$, cioè:

$$\Delta E_{T,S} = 0,$$

dove $E_{T,S} = E_{k,S} + E_P^{INT} + E_P^{EXT}$.

<u>Conservazione della Energia totale meccanica $E_{T,S}$</u> di un sistema S di particelle soggette all'azione di sole forze conservative:

$$E_{T,S} = U + E_p^{(EXT)} = \text{costante del moto.}$$

Esempio: Due corpi puntiformi collegati fra loro da una molla in moto nel campo di forza gravitazionale della terra.

Dipendenza di $E_{k,S}$ dal sistema di riferimento scelto e indipendenza di E_P^{INT} dal sistema scelto.

Nel sistema C, ancorato al CM: $E'_{k,S}$ è detta anche energia cinetica interna $E_{k,S}^{INT}$ e la somma $E_{k,S}^{INT} + E_{k,S}^{INT} = (E_{k,S}+E_P)^{INT} = U_S^{INT}$, che è chiamata anche energia interna.

Sistema a due corpi: massa ridotta.

Proprietà dei sistemi dei sistemi di due particelle.

Vettore posizione $\mathbf{r}_{CM}$ del centro di massa in L, Oxyz,t:

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{r}_i + m_2\mathbf{r}_2) / (m_i + m_2)$$

Vettore posizione della particella m_i nel sistema C, CMxyz,t:

$$\mathbf{r'}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}$$

$\mathbf{r'}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = m_2\, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2)$ $\qquad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$

$\mathbf{r'}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = m_1\, \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2)$ $\qquad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

Vettore velocità della particella m_i nel sistema C, CMxyz,t:

$$\mathbf{v'}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$$

$\mathbf{v'}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = m_2\, \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$ $\qquad \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

$\mathbf{v'}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CM} = m_1\, \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)$ $\qquad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$

Vettore accelerazione della particella m_i in C:

$$\mathbf{a'}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}$$

$\mathbf{a'}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{CM} = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2)$ $\qquad \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$

$\mathbf{a'}_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{CM} = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2)$ $\qquad \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$

Se il sistema delle due particelle è un sistema isolato, si ha:

$$\mathbf{a'}_1 = \mathbf{a}_1 = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2)$$

$$\mathbf{a'}_2 = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2$$

Problema dei due corpi:. Equazioni del moto

$$m_1\, \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}$$
$$m_2\, \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}$$

da cui : $\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}/m_1$ e $\mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}/m_2$ con $(\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12})$

Moto relativo della particella 1 rispetto alla particella 2:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}(1/m_1 + 1/m_2)$$

In termini di massa ridotta $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$.

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}/\mu$$

Equazione del <u>moto relativo</u> di 2 particelle, soggette unicamente alla loro mutua interazione (cioé che formano un sistema libero), in termini della loro massa ridotta si scrive:

$$\mu \mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}$$

Ora $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a'}_1 - \mathbf{a'}_2 = \mathbf{a'}_{12}$ (perché sistema isolato).

Quindi sarà pure: $\mu \mathbf{a'}_{12} = \mathbf{F}_{12}$

Questa è l’equazione del moto di una particella di massa μ sotto l'azione di una forza F_{12} in un SRI ancorato nel CM del sistema.

N.B.: Il moto relativo di due particelle nel sistema di riferimento L è <u>equivalente</u> al moto di una particella di massa μ sotto l'azione di una forza uguale alla forzadi interazione mutua $\mathbf{F}_{12}$ rispetto al sistema C (che è un sistema di riferimento inerziale!)

N.B.: Essendo il sistema isolato le grandezze dinamiche quantità di moto totale e il momento angolare totale del sistema si conserveranno, indipendentemente dalla scelta del sistema di riferimento (sia esso L o C).

Calcolo delle grandezze dinamiche collettive per un sistema a due corpi relative nel sistema di riferimento del centro di massa (C).

<u>Quantità di moto</u> nel sistema C o quantità di moto interna:

$$\mathbf{P}_S^{INT} = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{0},$$

dove $\mathbf{p}_1' = m_1\mathbf{v}_1'$ e $\mathbf{p}_2' = m_2\mathbf{v}_2'$, e ricordando che $\mathbf{v}_1' = m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$ e $\mathbf{v}_2' = m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)$, si avrà anche:

$$\mathbf{p}_1' = m_1\mathbf{v}_1' = m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] = \mu\, \mathbf{v}_{12}$$
$$\mathbf{p}_2' = m_2\mathbf{v}_2' = m_2[m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)] = \mu\, \mathbf{v}_{21} = -\mu\, \mathbf{v}_{12}.$$

Quindi: $p' = p_1' = p_2' = \mu\, v_{12}$ e, ovviamente:

$$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mu\, \mathbf{v}_{12} - \mu\, \mathbf{v}_{21} = \mathbf{0},$$

<u>Energia cinetica</u> interna di un sistema di 2 particelle:

$$E_k^{INT} = ½\mu\, v_{12}^2 = p'^2/2\mu.$$

Dimostrazione:
$E_{k,INT} = ½\, m_1\, v_1'^2 + ½\, m_2\, v_2'^2$

$= ½\ m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)]^2 + ½\ m_2\ [m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)]^2 =$
$= ½\ m_1m_2^2\ \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 + ½\ m2m^{12}\ \mathbf{v}_{21}^2/(m_1+m_2)^2 =$
$= ½\ m_1m_2\,(m_1+m_2)\ \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 = ½\ m_1m_2\,\mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2) =$
$= ½\ \mu\,\mathbf{v}_{12}^2$

Momento angolare interno o intrinseco del sistema:

$$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\ \mathbf{v}_{12}\,.$$

Dinostrazione:
$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_1{}' \wedge m_1\mathbf{v}_1{}' + \mathbf{r}_1{}' \wedge m_1\mathbf{v}_1{}' =$
$= m_2\ \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2)\ \wedge m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + m_1\ \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2)\ \wedge\ m_2$ $[m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)] =$
$= m_2\mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \wedge m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + [-\ m_1\ \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2)] \wedge m_2$ $[-\ m_1\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] =$
$= \mathbf{r}_{12} \wedge m_1m_2^2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 + \mathbf{r}_{12} \wedge m_1^2m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 =$
$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1m_2^2/(m_1+m_2)^2 + m_1^2m_2/(m_1+m_2)^2]\ \mathbf{v}_{12} =$
$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1m_2\,(m_1+m_2)/(m_1+m_2)^2]\ \mathbf{v}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\ \mathbf{v}_{12}$

Teoremi di Konig per un sistema isolato a due corpi,
con velocità $\mathbf{v}_{CM}$ costante:

Usando le grandezze calcolate nel sistema C si avrà:

$\mathbf{P}_S = M\ \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P'}_S = M\ \mathbf{v}_{CM}$

$E_{k,S} = E_{k,CM} + E_{k,INT} = ½\ Mv_{CM}^2 + ½\ \mu\ v_{12}^2 =$

$\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,CM} + \mathbf{L}'_{CM,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\ \mathbf{v}_{12}$

Esempio: caso del manubrio costituito da 2 corpi puntiformi collegati da un'asta rigida lunga L e priva di massa: calcolo della tensione della asta:

$$T = \mu\, v_{12}^2/r_{12} = \mu\, v_{12}^2/L.$$

Cosa succede quando $m_1 >> m_2$ (atomo di idrogeno: massa protone >> massa elettrone; sistema terra–luna: massa terra >> massa luna; etc.)

La massa ridotta $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2) = m_2/(1 + m_2/m_1) \cong m_2$
e come si studia il moto in termini della massa ridotta μ.