# 4 Funzioni di due o più variabili reali

Dopo aver studiato in dettaglio le funzioni di una variabile reale, affrontiamo ora alcuni aspetti della teoria delle funzioni di due o più variabili reali. La nostra esposizione riguarderà quasi esclusivamente il caso di due variabili reali, sia per non trattare da subito il caso generale di $n$ variabili appesantendo prematuramente le notazioni, sia soprattutto perché la gran parte delle novità rispetto al caso di una sola variabile appaiono già chiaramente nel caso di due variabili, e generalizzarle è spesso un facile esercizio di riscrittura.

## 4.1 Curve piane

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e siano $\alpha_1 : I \to \mathbb{R}$ e $\alpha_2 : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue; sia poi

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)).$$

La funzione $\alpha$ è detta *curva parametrica* (continua) nel piano cartesiano. Il nome "curva" viene talvolta attribuito direttamente alla sua immagine (o *sostegno*) $\{\alpha(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^2$ (infatti, mentre il parametro $t$ si muove nell'intervallo $I$, il punto $\alpha(t)$ descrive in $\mathbb{R}^2$ una traiettoria curvilinea che, almeno nei casi più comuni, viene familiarmente associata al termine "curva"): in tal caso, alla funzione $\alpha$ si attribuisce il nome di *parametrizzazione* della curva. Le funzioni $\alpha_1$ e $\alpha_2$ sono dette *componenti* della curva parametrica $\alpha$: esse indicano rispettivamente la coordinata $x$ e $y$ del punto $\alpha(t)$.
La scelta di $t$ per indicare il parametro è particolarmente espressiva, perché dà l'idea dell'evoluzione *temporale* del punto che percorre l'immagine di $\alpha$ in $\mathbb{R}^2$: se ad esempio $I = [a, b]$ è compatto (cioè chiuso e limitato), i punti $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ sono detti rispettivamente *punto iniziale* e *punto finale* della curva, e rappresentano le posizioni del punto che percorre la curva negli "istanti" iniziale $t = a$ e finale $t = b$. Quando $t$ rappresenta proprio il tempo, la curva $\alpha(t)$ descrive dunque il moto di un punto geometrico nel piano cartesiano al trascorrere del tempo $t$, ed è detta *legge oraria del moto* del punto geometrico.

**Esempi.** **(1)** Se $P(x_0, y_0)$ è un qualsiasi punto del piano e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un qualsiasi vettore non nullo, la curva parametrica $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)$, ovvero $(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$, ha come sostegno la *retta in forma parametrica* descritta nel Capitolo 2. **(2)** (Fig. 4.1) Se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua qualsiasi, la funzione $\alpha_\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha_\varphi(t) = (t, \varphi(t))$ è detta *curva-grafico di* $\varphi$: infatti, la sua immagine nel piano cartesiano non è altro che il grafico della funzione $y = \varphi(x)$. Invertendo i ruoli di $x$ e $y$, se $\psi : I \to \mathbb{R}$ è un'altra funzione continua anche la funzione $\alpha_\psi : I \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha_\psi(t) = (\psi(t), t)$ è una curva-grafico di $\psi$, solo che stavolta essa ha come immagine il grafico della funzione $x = \psi(y)$. Ad esempio, la curva grafico $(t, mt + q)$ ha come sostegno la retta $y = mx + q$, mentre $(m't + q', t)$ ha come sostegno la retta $x = m'y + q'$, ovvero (se $m' \neq 0$) la retta $y = \frac{1}{m'}x - \frac{q'}{m'}$. **(3)** (Fig. 4.2) Ma non tutte le curve sono grafici di funzioni: ad esempio, la curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ha come immagine la circonferenza di raggio $r$ centrata in $(0, 0)$. **(4)** (Fig. 4.2)

Una generalizzazione del precedente esempio della circonferenza è dato dalle *curve polari* $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$, nelle quali anche la distanza dall'origine $r(t)$ dipende dal parametro $t$. Ad esempio, scegliendo $r(t) = t$ (la distanza cresce proporzionalmente al crescere della rotazione) si ottiene la *spirale di Archimede.*

Se $\alpha_1$ e $\alpha_2$ sono derivabili in $t_0 \in I$, la curva parametrica $\alpha$ si dirà *derivabile in* $t_0$: in tal caso, il *vettore derivato*

$$\alpha'(t_0) = (\alpha_1'(t_0), \alpha_2'(t_0))$$

rappresenta la direzione tangente alla curva immagine nel punto $\alpha(t_0)$, ed il verso di percorrenza della curva al crescere di $t$. La curva si dirà *derivabile* se lo è in ogni $t \in I$.

**Esempio.** Se $t$ è il tempo, il vettore derivato $\alpha'(t_0)$ rappresenta la *velocità istantanea* del punto geometrico all'istante $t_0$: si tratta di un vettore tangente alla traiettoria del moto nella posizione $\alpha(t_0)$ occupata dal punto all'istante $t_0$.

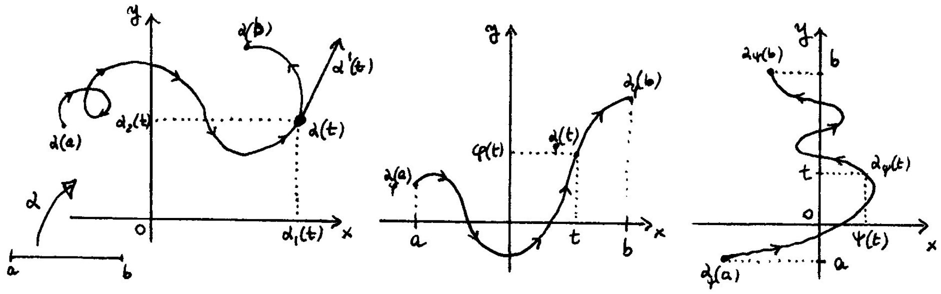

Figura 4.1: *Curva in $\mathbb{R}^2$, e vettore tangente; curve-grafico di $y = \varphi(x)$ e di $x = \psi(y)$.*

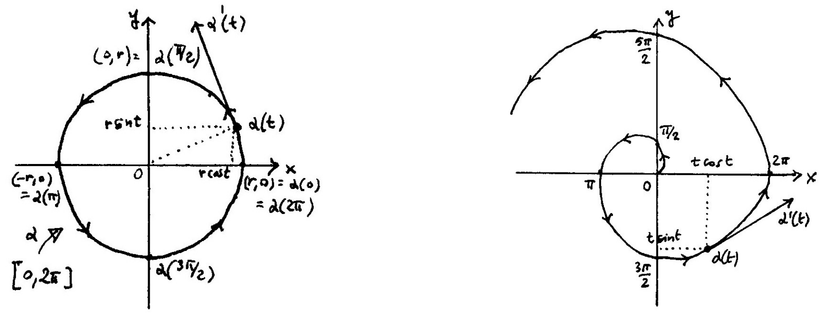

Figura 4.2: *Circonferenza; spirale di Archimede.*

Se $I = [a, b]$ (intervallo compatto) e $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ è una curva parametrica derivabile, si può calcolare la *lunghezza* (rettificata) $\ell$ della curva immagine in $\mathbb{R}^2$ tramite l'integrale

$$\ell = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2}\, dt;$$

in particolare, la lunghezza di una curva piana grafico di una funzione derivabile $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (che può essere espressa, come visto sopra, come curva immagine della funzione $\alpha_\varphi(t) = (t, \varphi(t))$) è

$$\ell_\varphi = \int_a^b \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx.$$

**Esempi. (1)** Come detto, la curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$ ha come immagine la circonferenza di raggio $r$ centrata in $(0,0)$. Il vettore derivato è dunque $\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$: si noti che esso rappresenta la direzione tangente alla circonferenza nel punto $\alpha(t)$ (ad esempio, per $t = \frac{\pi}{2}$ si ha il punto $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (0, r)$ e il vettore tangente $\alpha'(\frac{\pi}{2}) = (-r, 0)$. La lunghezza della curva risulta $\int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = (rt|_0^{2\pi} = 2\pi r$, la ben nota lunghezza della circonferenza di raggio $r$. **(2)** Consideriamo un pezzo di grafico della funzione esponenziale, diciamo quello di $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $\varphi(x) = e^x$. In questo caso si ha la curva-grafico $\alpha_\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha_\varphi(t) = (t, e^t)$, e il vettore tangente è $(1, e^t)$. La lunghezza è $\int_a^b \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$, che si può calcolare col cambio di variabile $t = \sqrt{1 + e^{2x}}$, ovvero $x = \frac{1}{2}\log(t^2 - 1)$, da cui $dx = \frac{t}{t^2-1}\, dt$: essendo $\int \frac{t^2}{t^2-1}\, dt = \int (1 + \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1})\, dt = t + \frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1} + k$, e notando che ad esempio $\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{e^{2b}+1}-1}{\sqrt{e^{2b}+1}+1} = \frac{1}{2}\log\frac{e^{2b}}{(\sqrt{e^{2b}+1}+1)^2} = \frac{1}{2}\log(e^{2b}) - \frac{1}{2}\log((\sqrt{e^{2b}+1}+1)^2) = b - \log(\sqrt{e^{2b}+1}+1)$, si ottiene $(t + \frac{1}{2}\log\frac{t-1}{t+1}]_{\sqrt{1+e^{2a}}}^{\sqrt{1+e^{2b}}} = \sqrt{e^{2b}+1} - \sqrt{e^{2a}+1} - (b-a) + \log\frac{\sqrt{e^{2b}+1}-1}{\sqrt{e^{2a}+1}-1}$.

Una curva piana può essere data anche in *forma cartesiana* tramite un'equazione

$$f(x,y) = 0,$$

come luogo geometrico dei punti che vi appartengono. Come già fatto nel Capitolo 2 per le rette nel piano, è possibile passare da una forma cartesiana ad una forma parametrica.

(1) Per esprimere una curva cartesiana come curva parametrica (cioè, per trovare una parametrizzazione $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ che abbia quel sostegno), dall'equazione $f(x,y) = 0$ si può provare ad esplicitare una delle due variabili rispetto all'altra, esprimendo la curva (o almeno una sua parte) come curva-grafico $y = \varphi(x)$ oppure $x = \psi(y)$: una volta fatto ciò, una parametrizzazione si trova immediatamente considerando $\alpha_\varphi(t) = (t, \varphi(t))$ oppure $\alpha_\psi(t) = (\psi(t), t)$.

(2) Viceversa, se si ha una curva parametrica $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ di componenti $(\alpha_1, \alpha_2)$, dal sistema $\begin{cases} x = \alpha_1(t) \\ y = \alpha_2(t) \end{cases}$ si può cercare una relazione tra $x$ e $y$ che sia soddisfatta per ogni $t$: ad esempio, ciò si può sempre fare "eliminando" il parametro $t$ ricavandolo da una delle due equazioni e poi sostituendolo poi nell'altra, fino a determinare la curva come curva-grafico $y = \varphi(x)$ oppure $x = \psi(y)$, e dunque direttamente come curva cartesiana $f(x,y) = y - \varphi(x) = 0$ oppure $f(x,y) = x - \psi(y) = 0$.

**Esempi. (1)** Come visto nel Capitolo 2, una retta in forma cartesiana ha equazione $f(x,y) = ax + by + c = 0$ con $(a,b) \neq (0,0)$ non entrambi nulli: se ad esempio $b \neq 0$, si ricava la curva-grafico $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, e dunque una parametrizzazione $\alpha(t) = (t, -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b})$ (che corrisponde alla forma parametrica $(0, -\frac{c}{b}) + t(1, -\frac{a}{b})$); viceversa, data una retta in forma parametrica $(x,y) = \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2)$ con $(v_1, v_2) \neq (0,0)$, se ad esempio $v_2 \neq 0$ si ricava $t = \frac{y - y_0}{v_2}$, e sostituendo in $x = x_0 + tv_1$ si ricava $x = \psi(y) =$

$x_0 + \frac{y-y_0}{v_2} v_1 = \frac{v_1}{v_2} y + (x_0 - \frac{v_1}{v_2} y_0)$, da cui l'equazione cartesiana $f(x,y) = v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0$. **(2)** L'equazione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ rappresenta la circonferenza $C$ di centro $(2,0)$ e raggio 1: da tale equazione si può esplicitare ad esempio $y$, ottenendo $y = \pm\sqrt{4x - x^2 - 3}$ (se si sceglie il segno "+" si sta descrivendo la metà superiore di $C$, mentre se si sceglie il segno "−" si sta descrivendo la metà inferiore). Ad esempio, da $y = -\sqrt{4x - x^2 - 3}$ si ottiene la parametrizzazione come curva-grafico $\alpha(t) = (t, -\sqrt{4t - t^2 - 3})$, definita per $0 \le x \le 4$, che funziona solo per la metà inferiore di $C$. Viceversa, $C$ può essere descritta parametricamente anche tramite $\beta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ data da $\beta(t) = (2 + \cos t, \sin t)$, ovvero $\begin{cases} x = \beta_1(t) = 2 + \cos t \\ y = \beta_2(t) = \sin t \end{cases}$ : da $x - 2 = \cos t$ e $y = \sin t$ si nota che la relazione $(x-2)^2 + y^2 = 1$ è soddisfatta per ogni $t$, e dunque essa fornisce una forma cartesiana per $C$: essa equivale infatti a $(x-2)^2 + y^2 - 1 = 0$, ovvero nuovamente l'equazione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

## 4.2 Funzioni di due variabili, limiti, continuità

Una *funzione di due variabili reali* a *valori reali* è una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ove $A$ è un sottoinsieme del piano cartesiano $\mathbb{R}^2$. Così come l'ambiente naturale per visualizzare il grafico di una funzione di una variabile reale a valori reali era il piano cartesiano (intendendo il dominio come un sottoinsieme dell'asse $x$ ed il codominio come l'asse $y$), l'ambiente naturale per visualizzare il grafico di una funzione di due variabili reali a valori reali sarà lo spazio cartesiano a tre dimensioni (rappresentando il dominio $A$ come un sottoinsieme del piano orizzontale di coordinate $(x,y)$, ed il codominio come l'asse $z$). In Figura 4.3 mostriamo tre esempi di grafico.

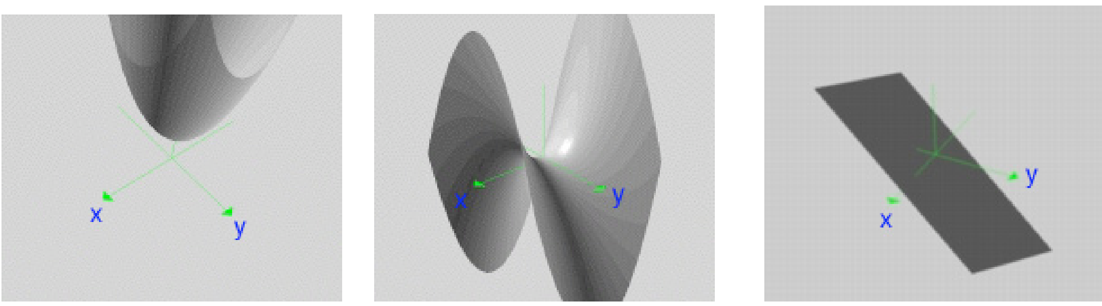


Figura 4.3: *Grafici di* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, *di* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *e di* $f(x,y) = \frac{x}{2} - y - 1$.

Le funzioni del tipo $f(x,y) = ax + by + c$ per qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$ sono dette *affini*, e più specificamente *affini omogenee*, o *lineari*, se $c = 0$. Il grafico della funzione affine $f(x,y) = ax + by + c$ sarà dunque il piano in $\mathbb{R}^3$ dato dall'equazione cartesiana $z = ax + by + c$, ovvero $ax + by - z + c = 0$: poiché il coefficiente di $z$ è non nullo, si tratterà di un piano non parallelo all'asse $z$, che intersecherà nel punto $(0, 0, c)$.

Determinare il *dominio naturale* di una funzione $f(x,y)$ data come formula nelle coordinate

$(x, y)$ avrà lo stesso significato di prima: si tratterà di determinare l'insieme di tutte le coppie $(x, y)$ nelle quali la formula ha senso. Similmente, studiare il *segno* di $f(x, y)$ significa determinare l'insieme di tutte le coppie $(x, y)$ del dominio di $f$ nelle quali $f(x, y) = 0$, o $f(x, y) > 0$, o $f(x, y) < 0$ (si tratterà dei punti del dominio nei quali il grafico interseca/sta sopra/sta sotto il piano orizzontale.

Se $I$ è un intervallo di $\mathbb{R}$ e $\alpha : I \to A$ è una curva la cui immagine è contenuta in $A$, la funzione composta $f \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ è detta *restrizione di $f$ alla curva $\alpha$*: infatti, $f$ viene calcolata solo sui punti dell'immagine di $\alpha$, ovvero è come se il suo dominio venisse ristretto a quei punti. Ciò può risultare conveniente per comprendere l'andamento di $f$ "tagliandone il grafico lungo particolari curve": le scelte più comuni di curve cui restringere $f$ sono le rette $x = a$, $y = b$ oppure $y = mx + q$.

**Esempi.** **(1)** La funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ ha dominio $A = \mathbb{R}^2$; si annulla quando $x^2 - y^2 = 0$, ovvero lungo le bisettrici $y = \pm x$; ed è $> 0$ quando $x^2 - y^2 > 0$, ovvero per $|x| > |y|$ (è la zona compresa tra le bisettrici che contiene l'asse $x$). Se restringiamo $f$ alle rette $x = a$ (parallele all'asse $y$) oppure $y = b$ (parallele all'asse $x$) otteniamo i "tagli" $f(a, y) = a^2 - y^2$ e $f(x, b) = x^2 - b^2$: come funzioni rispettivamente di $y$ o di $x$, si tratta di parabole con la concavità rivolta rispettivamente verso il basso o verso l'alto. Questi risultati sono evidenti ricordando il grafico di $f$, mostrato in precedenza. **(2)** Il dominio naturale della funzione $f(x, y) = \log(x + y) - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ (si tratta dei punti interni al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1, bordo compreso, che stanno sopra la retta $y = -x$ esclusa. **(3)** Il dominio naturale della funzione $g(x, y) = \arcsin(xy)$ è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$ (si tratta dei punti compresi tra i quattro rami di iperbole $y = \pm\frac{1}{x}$). Si ha $g(x, y) = 0$ quando $xy = 0$ (ovvero sugli assi $x = 0$ e $y = 0$), e $g(x, y) > 0$ quando $xy > 0$ (ovvero nelle zone del dominio che giacciono nel primo e terzo quadrante). **(4)** Il dominio naturale della funzione $h(x, y) = \frac{\log\sin(\pi x)}{\sqrt{\sin(\pi y)}}$ è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin\pi x > 0,\ \sin\pi y > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2h < x < 1 + 2h,\ 2k < y < 1 + 2k,\ h, k \in \mathbb{Z}\}$ (si tratta della "scacchiera" fatta dai quadrati aperti di lato 1 a partire dal quadrato $]0, 1[\times]0, 1[$).

Quasi tutti i concetti che abbiamo introdotto e descritto per le funzioni di una variabile reale hanno una naturale estensione al caso di funzioni di due variabili reali. Tuttavia, il fatto che una tale funzione dipende da due variabili reciprocamente indipendenti anziché da una sola, genera un aumento di complicazione nella gestione di tali concetti, al punto tale che, una volta compreso il caso di due variabili, si è praticamente compiuto tutto lo sforzo necessario a comprendere il caso generale di funzioni di $n$ variabili reali, per $n \in \mathbb{N}$ qualunque.

**Limiti e continuità** La topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$ è una naturale estensione di quella di $\mathbb{R}$: gli intorni di un punto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ sono i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che contengono qualche palla aperta

$$B_{\vec{x}_0}(r) = \{\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x} - \vec{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

Pertanto, se $A$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ è di accumulazione per $A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione, la nozione di *limite* resterà la stessa di quella di funzioni di una variabile:

se $\ell \in \mathbb{R}$, si dirà che

$$\lim_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \ell \qquad \text{se} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \\ \quad \text{tale che, se } |\vec{x}-\vec{x}_0| < \delta, \text{ allora } |f(\vec{x})-\ell| < \varepsilon\end{array}}$$

e che

$$\lim_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \pm\infty \qquad \text{se} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{per ogni } N > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \\ \quad \text{tale che, se } |\vec{x}-\vec{x}_0| < \delta, \text{ allora } f(\vec{x}) \gtrless \pm N\end{array}}\ .$$

Si può inoltre aggiungere un "punto all'infinito" $\infty$ al piano $\mathbb{R}^2$, da pensarsi "lontanissimo" dall'origine $\vec{0}$ e dunque da tutti gli altri punti di $\mathbb{R}^2$: gli "intorni" di $\infty$ saranno i sottoinsiemi $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ove $D$ è un qualsiasi sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$ (cioè, esiste $M > 0$ tale che $D \subset B_{\vec{0}}(M)$, ovvero $|\vec{x}| < M$ per ogni $\vec{x} \in D$), e dunque ognuno di tali intorni contiene un "intorno fondamentale" del tipo $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| > M\}$. Pertanto, $\infty$ sarà di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}^2$ se e solo se per ogni $M > 0$ esiste $\vec{x} \in A$ tale che $|\vec{x}| > M$, ovvero se e solo se $A$ è illimitato: in tal caso

$$\lim_{\vec{x}\longrightarrow\infty} f(\vec{x}) = \ell \qquad \text{significa} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } M > 0 \\ \quad \text{tale che, se } |\vec{x}| > M, \text{ allora } |f(\vec{x})-\ell| < \varepsilon\end{array}}$$

e

$$\lim_{\vec{x}\longrightarrow\infty} f(\vec{x}) = \pm\infty \qquad \text{significa} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{per ogni } N > 0 \text{ esiste } M > 0 \\ \quad \text{tale che, se } |\vec{x}| > M, \text{ allora } f(\vec{x}) \gtrless \pm N\end{array}}\ .$$

Una volta precisate le nozioni di limite, si può parlare di continuità: se $\vec{x}_0 \in A$, di dirà che $f$ è *continua* in $\vec{x}_0$ se $\lim_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$, il che è vero quando

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{esistono } \delta > 0 \text{ e } \varphi : A \to \mathbb{R} \text{ infinitesima per } \vec{x} \to \vec{x}_0 \\ \qquad \text{tali che, se } |\vec{x}-\vec{x}_0| < \delta, \text{ allora } |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \le |\varphi(\vec{x})|\end{array}}\ .$$

Continuano a valere le proprietà fondamentali delle funzioni continue di una variabile: in particolare le funzioni elementari sono continue nei punti in cui sono definite; somme, prodotti, multipli scalari, quozienti, composizioni di funzioni continue sono ancora funzioni continue. Pertanto, solitamente, per la gran parte dei punti di $A$ la continuità di $f$ discende subito da tali proprietà; i problemi insorgono quando si indaga la continuità nei punti dubbi del dominio. Infatti, poiché ora $f$ dipende da due variabili indipendenti $x$ e $y$, ci sono molti modi diversi di tendere con $\vec{x}$ a $\vec{x}_0$, e non solo "da destra e da sinistra" come nel caso di funzioni di una variabile: ciò può rendere non chiaro il comportamento di $f(\vec{x})$ all'intorno di un punto dubbio $\vec{x}_0$. In questi casi, è consigliabile iniziare vedendo se $f$ è discontinua in $\vec{x}_0$, e per controllare ciò basta provare a tendere a $\vec{x}_0$ lungo qualche curva passante per $\vec{x}_0$ (chiaramente, se $f$ è continua in $\vec{x}_0$ allora lo è anche se ristretta ad ogni curva passante per $\vec{x}_0$, e perciò basta trovare una curva passante per $\vec{x}_0$ per cui la restrizione di $f$ è discontinua

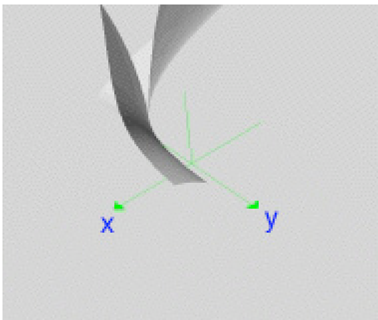


Figura 4.4: *Grafico di* $f(x,y)=\sqrt{\frac{x-1}{y}}+1$.

per concludere che $f$ è discontinua in $\vec{x}_0$). Poi, se $f(\vec{x})$ sembra effettivamente tendere a $f(\vec{x}_0)$ quando $\vec{x}$ tende in vari modi a $\vec{x}_0$, si può cercare di mostrare che $f$ è continua in $\vec{x}_0$.

**Esempi. (1)** La funzione $f(x,y)=\sqrt{\frac{x-1}{y}}+1$ (vedi Figura 4.4) è continua in tutti i punti del suo dominio naturale $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 1,\ y>0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\leq 1,\ y<0\}$. Ma nessuno vieta di definire la funzione $f$ qui sopra anche nei punti fuori di $A$ in qualunque modo piaccia. Ad esempio, decidiamo di porla sempre uguale a 1 in essi, ovvero definiamo:

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{x-1}{y}}+1 & ((x,y)\in A)\\ 1 & ((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus A).\end{cases}$$

Il problema è: in quali punti questa "$f$ estesa" è continua? Certamente lo è in tutti i punti *interni* di $A$ (ovvero in $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1,\ y>0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<1,\ y<0\}$), perché al loro intorno non è cambiato nulla rispetto a prima; e lo è anche in tutti quelli *interni* di $\mathbb{R}^2\setminus A$ (ovvero $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1,\ y<0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<1,\ y>0\}$) perché al loro intorno la funzione vale costantemente 1. I punti dubbi, dunque, sono quelli di frontiera, ovvero quelli delle rette $x=1$ e $y=0$. Iniziamo da quelli sull'asse $x$: se $\vec{x}_0=(x_\circ,0)$ con $x_\circ\neq 1$, è evidente che $f$ è discontinua in $\vec{x}_0$, perché se $\vec{x}$ tende a $\vec{x}_0$ provenendo dalla retta verticale sopra di lui allora $f(\vec{x})$ tende a $+\infty$, e dunque non tende a $1=f(\vec{x}_0)$; anche per il punto $\vec{x}_0=(1,0)$ non è difficile rendersi conto che $f$ vi è discontinua, perché in ogni intorno di $\vec{x}_0$ cadono sempre punti dell'asse $x$ diversi da lui, e, come appena visto, nei punti appena sopra di essi la funzione "si impenna" a $+\infty$, ed è dunque chiaro che la funzione non tende a $1=f(\vec{x}_0)$ quando $\vec{x}$ tende a $\vec{x}_0$. Andiamo ora sui punti della retta $x=1$. Se $\vec{x}_0=(1,y_\circ)$ con $y_\circ\neq 0$ la funzione è continua in $\vec{x}_0$, perché $f(\vec{x})$ tende a $1=f(\vec{x}_0)$ sia quando $\vec{x}\in A$ (in effetti $\vec{x}_0\in A$, e la $f:A\to\mathbb{R}$ originale era già continua in $\vec{x}_0$) che quando $\vec{x}\notin A$ (ovvio, perché fuori di $A$ la funzione vale sempre 1). Ricapitolando, la "$f$ estesa" è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ fuori dall'asse $x$. Si noti che, se si fosse deciso di porre $f$ su $\mathbb{R}^2\setminus A$ uguale ad un altro valore $\alpha\neq 1$, allora la "$f$ estesa" sarebbe stata continua solo sui punti di $\mathbb{R}^2$ fuori dalle rette $x=1$ e $y=0$: dunque, estendendosi, la nostra $f$ avrebbe perso la continuità nei punti di frontiera di $A$. **(2)** La funzione $f(x,y)=\frac{y}{x}$ è definita e continua in tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ fuori dall'asse $y$. È presto visto che non è possibile prolungarla per continuità a questi punti: se $\vec{x}_0=(0,y_\circ)$ con $y_\circ\neq 0$, $|f|$ diverge a $+\infty$ quando $(x,y)$ tende a $\vec{x}_0$ lungo la retta orizzontale $y=y_\circ$, mentre ha addirittura vari comportamenti quando $(x,y)$ tende a $(0,0)$: è nulla sull'asse $x$, vale 1 sulla retta $y=x$, e si impenna a $+\infty$ quando $\vec{x}$ si avvicina restando sulla curva $y=\sqrt{x}$ (infatti la funzione vale $f(x,\sqrt{x})=\frac{1}{\sqrt{x}}$, e diverge quando $x \to 0^+$). **(3)** La funzione $g(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$, definita e continua fuori dagli assi, tende chiaramente a 1 quando $(x,y)$ si avvicina agli assi (perché $xy$ tende a zero: in pratica, ci si è ridotti ad una variabile $t = xy$), e dunque si può prolungare $g$ per continuità anche sugli assi ponendola uguale a 1. **(4)** Per la funzione $h(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$, definita e continua per $(x,y) \neq (0,0)$, ci vuole invece un po' di fantasia per capire cosa succede quando $(x,y) \to (0,0)$: bisogna infatti notare che $|h(x,y)| \leq \frac{\sqrt{|xy|}}{2}$ (sugli assi $h$ è nulla; mentre, essendo $|x|+|y| \geq 2\sqrt{|xy|}$, fuori dagli assi si ha $|h(x,y)| \leq \frac{|xy|}{2\sqrt{|xy|}} = \frac{\sqrt{|xy|}}{2}$), ed essendo $\frac{\sqrt{|xy|}}{2}$ infinitesima si può prolungare $h$ per continuità in $(0,0)$ col valore 0. **(5)** La stessa cosa vale per la funzione $k(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{|x|+y^6}}$: infatti $|k(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{|x|+y^6}} \leq \frac{|xy|}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|}|y|$, infinitesima. **(6)** La funzione $\ell(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ è definita e continua fuori dalla retta $y = -x$. Nei punti del tipo $(\alpha, -\alpha)$ con $\alpha \neq 0$ la funzione certamente diverge, dunque è impossibile prolungarla per continuità. Anche nell'origine la funzione è non prolungabile, ma non si può accorgersene tendendo a $(0,0)$ lungo una qualsiasi retta diversa da $y = -x$: infatti ciò farebbe pensare che $\ell$ sia infinitesima in $(0,0)$ ($\ell$ è nulla sugli assi, e la sua restrizione ad una retta $y = mx$ con $m \neq -1$ dà $\ell(x,mx) = \frac{m}{m+1}x$, infinitesima per $x \to 0$). Invece, se si tende a $(0,0)$ lungo $y = -\operatorname{arctg} x$, che e' tangente a $y = -x$ in $(0,0)$, si ha $\ell(x, -\operatorname{arctg} x) = -\frac{x \operatorname{arctg} x}{x - \operatorname{arctg} x} \sim_0 -\frac{x^2}{x^3/3} = -\frac{3}{x}$, che diverge per $x \to 0$. O, più semplicemente, basta notare che in ogni intorno di $(0,0)$ vi sono punti del tipo $(\alpha, -\alpha)$, nei quali $\ell$ diverge.

Come si nota, la situazione è molto più incerta che nel caso di una variabile: vediamo ancora qualche esempio.

**Esercizio.** *Si chiede di dire su quale sottoinsieme $A$ di $\mathbb{R}^2$ è definita la funzione $f(x,y)$ a valori in $\mathbb{R}$, e se è possibile prolungare per continuità $f$ anche ai punti di $\mathbb{R}^2 \setminus A$.*

$$\textbf{(1)}\ \frac{xy^2}{x^2+y^4}; \quad \textbf{(2)}\ \frac{x^2y}{x^3+y^2}; \quad \textbf{(3)}\ \frac{e^{-\frac{1}{xy}}}{x^2+2y^2}; \quad \textbf{(4)}\ \frac{x}{y^2-1}\arctan\left(\frac{y-1}{x^2}\right); \quad \textbf{(5)}\ \frac{\sin(y)\sin(x+y)}{xy}.$$

Risoluzione. **(1)** (Vedi Figura 4.5(a)) $f$ è definita su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ed è continua in ogni punto di $A$. Poiché $f$ è nulla sugli assi, l'unica speranza di estendere $f$ per continuità anche in $(0,0)$ è di porre $f(0,0) = 0$. Ora, si noti che la restrizione di $f$ ad ogni retta passante per $(0,0)$ è continua in $(0,0)$: ciò vale ovviamente per l'asse $y$, mentre per tutte le altre rette $y = mx$ si ha (per $x \neq 0$) $f(x,mx) = \frac{m^2x}{1+m^4x^2}$, che tende a zero quando $x$ tende a zero. Come sappiamo, ciò non basta per dire che $f$ è continua in $(0,0)$, ma ci porta a ritenere questo fatto assai probabile. Ogni sforzo per maggiorare $|f|$ con una funzione $\varphi(x,y)$ infinitesima cade però nel vuoto (essendo $x^2+y^4 \geq 2|x|y^2$ si riesce solo a provare che $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}$, ovvero che $f$ è limitata, ma niente di più), e questo inizia a far sorgere dei sospetti... che si rivelano fondati. Infatti, se si restringe $f$ alla curva $y = \sqrt{x}$ si nota che $f(x,\sqrt{x}) \equiv \frac{1}{2}$: poiché ogni intorno di $(0,0)$ contiene punti in cui $f$ vale $\frac{1}{2}$, la funzione $f$ non può essere infinitesima in $(0,0)$: dunque, essa è discontinua. Questo esercizio può essere generalizzato studiando la funzione $f_{\alpha\beta}(x,y) = \frac{xy}{|x|^\alpha+|y|^\beta}$, con $\alpha,\beta > 0$ (il caso appena studiato si può ricondurre al caso $(\alpha,\beta) = (2,2)$: infatti limitando lo studio al primo quadrante ché tanto $f(-x,y) = f(x,-y) = -f(x,y)$, basta considerare il cambio di variabile $(\xi,\eta) = (x,\sqrt{y})$). Anche in questo caso generalizzato, naturalmente, l'unica speranza di estendere $f_{\alpha\beta}$ per continuità in $(0,0)$ è di porre $f_{\alpha\beta}(0,0) = 0$. Il ragionamento appena fatto per mostrare che la funzione $f$ è discontinua in $(0,0)$ ci permette di concludere che $f_{\alpha\beta}$ è discontinua in $(0,0)$ se $\beta \geq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ (settore chiuso di iperbole equilatera nel quadrante aperto $(\alpha,\beta)$, che non a caso ricomprende il caso $(\alpha,\beta) = (2,2)$, suo vertice): infatti, se si restringe $f_{\alpha\beta}$ ad una curva $y = x^\gamma$ con $\gamma > 0$ si ottiene $|f(x,x^\gamma)| = \frac{|x|^{1+\gamma}}{|x|^\alpha+|x|^{\beta\gamma}}$, e questa restrizione non è infinitesima se $1+\gamma \le \min\{\alpha, \beta\gamma\}$, ed esiste qualche $\gamma > 0$ che soddisfa questa condizione se e solo se $\beta \ge \frac{\alpha}{\alpha-1}$, per l'appunto. Invece, se $\max\{\alpha,\beta\} \le 2$ e $(\alpha,\beta) \ne (2,2)$ (ovvero, il quadrato $]0,2]\times]0,2]$ privato del vertice $(2,2)$ nel quadrante aperto $(\alpha,\beta)$) allora la funzione $f_{\alpha\beta}$ è continua, perché, essendo $|x|^\alpha + |y|^\beta \ge 2|x|^{\frac{\alpha}{2}}|y|^{\frac{\beta}{2}}$, si ricava $|f(x,y)| \le |x|^{1-\frac{\alpha}{2}}|y|^{1-\frac{\beta}{2}}$, infinitesima. E la funzione $f_{\alpha\beta}$ è continua anche se $\min\{\alpha,\beta\} \le 1$ (ovvero, le strisce $]0,1]\times]0,+\infty[$ e $]0,+\infty[\times]0,1]$ nel quadrante aperto $(\alpha,\beta)$): infatti, supponendo ad esempio che $\alpha \le 1$, si ha $|f(x,y)| = \frac{|xy|}{|x|^\alpha+|y|^\beta} \le \frac{|xy|}{|x|^\alpha} = |x|^{1-\alpha}|y|$, ed essendo $1-\alpha \ge 0$ tale funzione è infinitesima. (Questi ultimi due casi comprendono le funzioni $h$ e $k$ viste in precedenza.) **(2)** (Vedi Figura 4.5(b)) $f$ è definita su $A = \mathbb{R}^2 \setminus C$, ove $C$ è la cuspide (nel secondo e terzo quadrante) data da $|y| = (-x)^{\frac{3}{2}}$, ed è continua in $A$. La funzione $|f|$ diverge a $+\infty$ quando $(x,y)$ tende ad un punto $(x_\circ, y_\circ) \in C$ con $x_\circ < 0$. Idem per $(0,0)$: in ogni suo intorno vi sono punti di $C$ diversi da esso, e dunque anche punti in cui $|f|$ è arbitrariamente grande. Dunque $f$ non può essere prolungata per continuità ad alcun punto di $C$. **(3)** (Vedi Figura 4.5(c)) $f$ è definita su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\}$, ovvero fuori dagli assi. Si consideri $(x_\circ, 0)$ con $x_\circ > 0$: se si tende a $(x_\circ, 0)$ provenendo dal basso su $x = x_\circ$, la funzione $f(x_\circ, y)$ tende a $+\infty$. Ragionamenti simili valgono per tutti gli altri punti sugli assi diversi dall'origine; infine, ogni intorno di $(0,0)$, contiene punti degli assi diversi da esso, e dunque punti in cui $|f|$ è arbitrariamente grande: nemmeno in $(0,0)$ sarà possibile prolungare $f$ per continuità. Invece $g(x,y) = \frac{e^{-\frac{1}{|xy|}}}{x^2+2y^2}$ (pure essa definita fuori dagli assi) può essere prolungata per continuità agli assi col valore 0: infatti, da $x^2+2y^2 \ge 2\sqrt{2}|xy|$ si ha $|g(x,y)| \le \frac{e^{-\frac{1}{|xy|}}}{2\sqrt{2}|xy|}$, e questa funzione è infinitesima quando $(x,y)$ tende ad un qualsiasi punto degli assi, perché in tal caso la quantità $t = |xy|$ è infinitesima, e $\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t} = 0$. **(4)** (Vedi Figura 4.6(a)) $f$ è definita su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ne 0,\ y \ne \pm 1\}$. Sui punti dell'asse $y$ diversi da $(0,\pm 1)$ la funzione si può prolungare per continuità ponendola uguale a zero: infatti, quando $(x,y)$ tende ad uno di questi punti la funzione $f$ è infinitesima, in quanto prodotto di una infinitesima (che è $f_1(x,y) = \frac{x}{y^2-1}$) per una limitata (ovvero $f_2(x,y) = \arctan\left(\frac{y-1}{x^2}\right)$). Nei punti della retta $y = -1$ diversi da $(0,-1)$ la funzione non può essere prolungata per continuità, in quanto $|f|$ diverge a $+\infty$ quando $(x,y)$ tende ad uno di essi: infatti, $|f_1|$ diverge e $|f_2|$ si mantiene lontana da zero; non c'è prolungabilità per continuità nemmeno per $(0,-1)$, perché in ogni suo intorno giacciono punti della retta $y = -1$ diversi da esso, e al loro intorno $|f|$ diverge. Restano da esaminare i punti della retta $y = 1$. Se facciamo tendere $(x,y)$ a $(x_\circ, 1)$ con $x_\circ \ne 0$, poiché vale $\lim_{t\to 0} \frac{\arctan(\alpha t)}{t} = \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ otteniamo che $f(x,y) = \frac{x}{y+1}\frac{\arctan\left(\frac{1}{x^2}(y-1)\right)}{y-1}$ tende al valore finito $\frac{x_\circ}{1+1}\frac{1}{x_\circ^2} = \frac{1}{2x_\circ}$. Poiché tale valore diverge quando $x_\circ \to 0$, certamente $f$ non è prolungabile per continuità in $(0,1)$. Ricapitolando, $f$ è definita e continua in tutti i punti di $A$, e può essere prolungata per continuità solo ai punti dell'asse $y$ diversi da $(0,\pm 1)$ (ponendola uguale a zero) e a quelli della retta $y = 1$ diversi da $(0,1)$ (ponendo $f(x,1) = \frac{1}{2x}$). **(5)** (Vedi Figura 4.6(b)) $f$ è definita su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{xy = 0\}$. In $(0,0)$ non è prolungabile (tende a 2 lungo $y = x$, ed è nulla lungo $y = -x$). Sui punti $(a,0)$ con $a \ne 0$ si può prolungare ponendo $f(a,0) = \frac{\sin(a)}{a}$; tendendo a $(0,b)$ con $b \ne \mathbb{Z}\pi$ lungo $y = b$ si ha che $|f|$ diverge, ed in ogni intorno di $(0,k\pi)$ (con $k \in \mathbb{Z}$) c'è qualche punto di questo tipo (alternativamente, per $k \ne 0$ porre $X = x$, $Y = y - k\pi$: per $X \to 0$ vale $|f(X, |X|^{\frac{1}{3}})| \sim |X|^{-\frac{1}{3}}$, divergente). Dunque $f$ è prolungabile per continuità solo ai punti $(a,0)$ dell'asse $x$ diversi dall'origine, col valore $\frac{\sin(a)}{a}$.

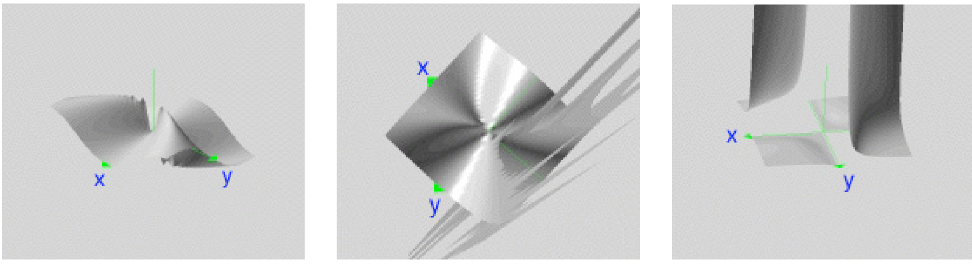


Figura 4.5: *Grafici di* $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, *di* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^3+y^2}$ *e di* $f(x,y) = \frac{e^{-\frac{1}{xy}}}{x^2+2y^2}$

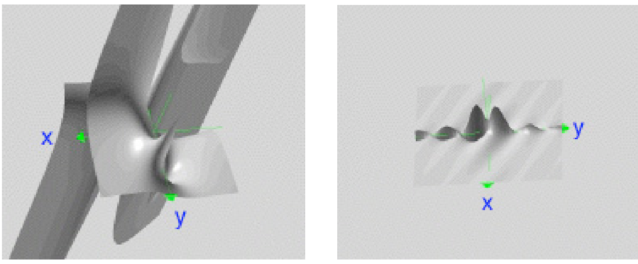


Figura 4.6: *Grafici di* $f(x,y) = \frac{x}{y^2-1} \operatorname{arctg}\left(\frac{y-1}{x^2}\right)$ *e di* $f(x,y) = \frac{\sin(y)\sin(x+y)}{xy}$

## 4.3 Derivate parziali

Passando dalla continuità al calcolo differenziale, definiamo la *derivata parziale* di una funzione $f(x,y)$ rispetto a $x$ oppure a $y$ in un punto di accumulazione $(x_0, y_0)$ del suo dominio $A$. Nel caso della variabile $x$, si tratta di

(1) restringere $f$ alla retta $y = y_0$, passante per $(x_0, y_0)$ e parallela all'asse $x$, ottenendo in questo modo una funzione $f_{y_0}(x) := f(x, y_0)$ della sola variabile $x$;

(2) calcolare (se possibile) la derivata di $f_{y_0}(x)$ nel punto $x_0$, cioè

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Se tale derivata esiste, essa si dirà appunto *derivata parziale* della funzione $f(x,y)$ rispetto ad $x$ nel punto $(x_0, y_0)$, e si denoterà col simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

o talvolta con $f'_x(x_0, y_0)$. Analogamente, per la variabile $y$, si tratta di

(1)' restringere $f$ alla retta $x = x_0$, passante per $(x_0, y_0)$ e parallela all'asse $y$, ottenendo in questo modo una funzione $f_{x_0}(y) := f(x_0, y)$ della sola variabile $y$;

(2)' calcolare (se possibile) la derivata di $f_{x_0}(y)$ nel punto $y_0$, ovvero

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Se tale derivata esiste, essa si dirà *derivata parziale* della funzione $f(x, y)$ rispetto ad $y$ nel punto $(x_0, y_0)$, e si denoterà col simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

o con $f'_y(x_0, y_0)$. Facendo questo calcolo in tutti i punti di $A$ in cui è possibile (diciamo $A'_x$ per la derivata parziale rispetto a $x$, e $A'_y$ per quella rispetto a $y$) si ottengono così due nuove funzioni

$$\frac{\partial f}{\partial x} : A'_x \to \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} : A'_y \to \mathbb{R},$$

le *derivate parziali* di $f$ rispetto a $x$ e a $y$. Per quanto si è detto, *per calcolare* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *è sufficiente derivare* $f(x, y)$ *rispetto alla variabile* $x$ *tenendo fissa la variabile* $y$, e viceversa per $\frac{\partial f}{\partial y}$.

**Esempi.** **(1)** Se $f(x, y) = 3x^2y - 2y^3$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 - 6y^2$, dunque ad esempio $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 2) = 6(-1)(2) = -12$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(3, -2) = 3(3)^2 - 6(-2)^2 = 3$. **(2)** Se $f(x, y) = x^2y - \cos y^2$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2y \sin y^2$. **(3)** Se $f(x, y) = \sin(x^2y - \log y)$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \cos(x^2y - \log y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 - \frac{1}{y}) \cos(x^2y - \log y)$. **(4)** Se $f(x, y) = \frac{\mathrm{tg}(x+y^2) - ye^{x^3}}{x \sin(xy)}$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\left(\frac{1}{\cos^2(x+y^2)} - 3x^2ye^{x^3}\right) x \sin(xy) - (\mathrm{tg}(x + y^2) - ye^{x^3})(\sin(xy) + xy \cos(xy))}{x^2 \sin^2(xy)}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\left(\frac{2y}{\cos^2(x+y^2)} - e^{x^3}\right) x \sin(xy) - (\mathrm{tg}(x + y^2) - ye^{x^3})(x^2 \cos(xy))}{x^2 \sin^2(xy)}.
\end{aligned}$$

È importante notare che nella derivata parziale rispetto ad $x$ l'*unica cosa* che interessa è il comportamento della funzione $f(x, y)$ lungo la retta $y = y_0$ e niente più; analogamente, nella derivata parziale rispetto ad $y$ l'unica cosa che interessa è il comportamento della funzione lungo la retta $x = x_0$. Non sorprende dunque più di tanto che la continuità di $f$ nel punto $(x_0, y_0)$ e l'esistenza delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ siano, in principio, proprietà indipendenti.

**Esempio.** La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = |x| + |y|$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ (perché il modulo e la somma sono funzioni continue), ma nessuna delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ esiste (infatti la restrizione di $f$ all'asse $y = 0$ è $f_0(x) = |x|$, non derivabile in $x_0 = 0$, e la restrizione di $f$ all'asse $x = 0$ è $f_0(y) = |y|$, non derivabile in $y_0 = 0$). Viceversa, la funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $g(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ se

$(x, y) \neq (0, 0)$ e da $g(0, 0) = 0$ non è continua in $(0, 0)$ (come si è visto nell'esercizio precedente) ma, poichè $g$ è identicamente nulla sugli assi $x = 0$ e $y = 0$, entrambe le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$ esistono, con valore 0; la stessa cosa si può affermare, in modo ancora più palese, per la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $h(x, y) = 1$ se $xy \neq 0$ (ovvero, se $(x, y)$ non sta sugli assi) e da $h(x, y) = 0$ se $xy = 0$.

Questi ultimi esempi sono illuminanti circa le differenze tra il caso di funzioni di una variabile e quello di funzioni di più variabili: finora eravamo abituati al fatto che una funzione derivabile era anche continua, e quanto appena visto sembra mettere in crisi questo fatto. In realtà, l'analogo di "derivabilità nel punto" per funzioni di più variabili non è "esistenza delle derivate parziali nel punto" ma, come vedremo tra breve, "differenziabilità nel punto", e allora tutto si chiarirà: esattamente come la derivabilità implicava la continuità per le funzioni di una variabile, questa "differenziabilità" implicherà la continuità per funzioni di più variabili. Comunque, ancora al livello di derivate parziali, diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ (con $A$ aperto di $\mathbb{R}^2$) è *di classe* $\mathcal{C}^1$ in un punto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ se le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ esistono *e sono continue* nel punto $\vec{x}_0$. Ciò generalizza la nozione di "funzione di classe $\mathcal{C}^1$" data a pag. 81 per funzioni di una variabile: sembrerebbe dunque naturale pensare che una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ debba in particolare essere "differenziabile", e dunque continua. Come vedremo tra breve, accadrà proprio così: per il momento osserviamo che, coerentemente a quanto appena anticipato, negli esempi precedenti le funzioni $g(x, y)$ e $h(x, y)$ hanno derivate parziali discontinue in $(0, 0)$.[67]

## 4.4 Funzioni differenziabili

"Differenziare" una funzione in un punto del suo dominio significa "riuscire ad approssimarla vicino a quel punto con una funzione affine (ovvero, un polinomio di primo grado), al prezzo di un errore sufficientemente piccolo". Spiegheremo cosa questo significhi partendo dalle funzioni di una variabile, per le quali si ritroverà un concetto già noto.

**Differenziabilità per funzioni di una variabile** Innanzitutto, cosa significa precisamente che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *affine*? Come detto, significa che "$\varphi(x)$ è un polinomio di primo grado", ovvero che

$$\text{esistono } m, q \in \mathbb{R} \text{ tali che} \quad \varphi(x) = mx + q \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Dunque, come si vede, *una funzione affine non è altro che una funzione il cui grafico è una retta non parallela all'asse $y$.* In particolare, se $q = 0$ si dice che $\varphi(x) = mx$ è una funzione

[67] Infatti le derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\frac{\partial g}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono date da $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{y^2(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$; considerando la loro restrizione alla parabola $x = 2y^2$, per $(x, y) \neq (0, 0)$ si ha $\frac{\partial g}{\partial x}(2y^2, y) = -\frac{y^2(4y^4-y^4)}{(4y^4+y^4)^2} = \frac{3}{25y^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(2y^2, y) = \frac{2(2y^2)y(4y^4-y^4)}{(4y^4+y^4)^2} = \frac{12}{25y}$, e dunque entrambe le derivate parziali divergono quando il punto $(2y^2, y)$ tende a $(0, 0)$. Quanto a $h$ (nulla sugli assi e uguale a 1 al di fuori) la cosa è ancora più chiara: $\frac{\partial h}{\partial x}$ (risp. $\frac{\partial h}{\partial y}$) non esiste in tutti i punti dell'asse $y$ (risp. dell'asse $x$) diversi da $(0, 0)$.

*affine omogenea*, o *lineare*: in tal caso il grafico sarà una retta passante per l'origine.
Se si è interessati ad un particolare punto $x_0$ del dominio di $\varphi$, può risultare comodo scrivere $\varphi(x)$ come

$$\varphi(x) = r + m(x - x_0), \qquad \text{con } r = mx_0 + q :$$

in questa forma è chiaro che $\varphi(x_0) = r$.[68]

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$ si dice *differenziabile* in un punto $x_0 \in A$ di accumulazione per $A$ se

(4.1) esiste una funzione affine $\varphi(x)$ tale che $f(x) = \varphi(x) + o_{x_0}(x - x_0)$ : [69]

l'idea è che, per $x$ vicino a $x_0$, la funzione $f$ è efficacemente approssimabile (a meno di resto infinitesimo di ordine superiore a uno) con una funzione affine $\varphi(x)$ (vedi Figura 4.7(a)).
Si noti subito che, scritta $\varphi = a + b(x - x_0)$, dalla condizione (4.1) si ricava subito $f(x_0) = \varphi(x_0) = a$; resta dunque da capire solo chi sia la pendenza $b$. La funzione lineare $bx$, il cui grafico è la retta passante per l'origine e parallela alla retta grafico della funzione affine approssimante in $x_0$, si dice *differenziale* di $f$ in $x_0$ e si denota usualmente con

$$df_{x_0}(x).$$

Pertanto, si ha per definizione $\varphi(x) = f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0)$.

Come si sarà forse già intuito, per le funzioni di una variabile la differenziabilità in un punto è equivalente alla derivabilità nel punto stesso:

**Proposizione 4.4.1.** *La funzione $f$ è differenziabile in $x_0$ se e solo se è derivabile in $x_0$, e vale*

$$df_{x_0}(x) = f'(x_0)x, \qquad \text{ovvero } f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0).$$

*Dimostrazione.* Se $f$ è derivabile in $x_0$, grazie alla formula di Taylor (Teorema 3.3.7) già sappiamo che $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$, espressione che mostra la differenziabilità di $f$ in $x_0$ con $a = f(x_0)$ e $df_{x_0}(x) = f'(x_0)x$. Viceversa, se $f$ è differenziabile in $x_0$, per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) = a + df_{x_0}(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$ con $df_{x_0}(x) = bx$: calcolando in $x_0$ si ricava allora $f(x_0) = a + 0 + 0 = a$, e allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)+df_{x_0}(x-x_0)+o_{x_0}(x-x_0)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{df_{x_0}(x-x_0)}{x-x_0} = b$, ovvero $f$ è derivabile in $x_0$ con $f'(x_0) = b$. □

Si noti dunque che, non a caso, la funzione approssimante $\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ha come grafico la *retta tangente* al grafico di $f$ in $x_0$ (in effetti, la miglior approssimazione lineare del grafico $f$ in $(x_0, f(x_0))$ è data dalla retta tangente al grafico nel punto stesso),

[68] È la ben nota formula della retta per un punto: la pendenza è $m$, ed il punto è $(x_0, r)$.
[69] Si ricordi (vedi pag. 69) che il simbolo "$o_{x_0}(x - x_0)$" significa "funzione trascurabile rispetto a $x - x_0$ nel punto $x_0$".

ed il grafico della funzione differenziale $df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da $df_{x_0}(x) = f'(x_0)\,x$, è la retta parallela per l'origine alla retta tangente al grafico di $f$ in $(x_0, f(x_0))$.

In sostanza, per le funzioni di una variabile parlare di "differenziabilità" significa solo rileggere la nozione di "derivabilità" dando risalto al suo aspetto di "approssimazione lineare al punto". In tale spirito, definiamo *differenziale totale* di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, derivabile in ogni punto del suo dominio $A \subset \mathbb{R}$, la seguente espressione formale:

$$df = f'(x)\,dx\,.$$

Il senso di tale scrittura è: se si altera la variabile $x$ di una piccola quantità $dx$ da un suo valore $x_0$, la corrispondente piccola alterazione subìta dalla funzione $f(x)$ dal valore $f(x_0)$ è approssimativamente data da

$$df = f'(x_0)\,dx.$$

Infatti, poiché $\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approssima efficacemente $f(x)$ per $x$ vicino a $x_0$, per $dx$ piccolo si ha

$$df \;=\; f(x_0 + dx) - f(x_0) \;\simeq\; \varphi(x_0 + dx) - f(x_0) \;=\; (f(x_0) + f'(x_0)\,dx) - f(x_0) \;=\; f'(x_0)\,dx.$$

**Esempio.** La funzione $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ è definita e derivabile in $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; il suo differenziale totale è $df = f'(x)\,dx = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}\,dx$. Pertanto, se ad esempio si sposta la variabile $x$ di una piccola quantità $dx$ dal valore $x_0 = -2$, la corrispondente piccola variazione di $f(x)$ dal valore $f(-2) = \frac{4}{3}$ è data da $df = f'(-2)\,dx = -\frac{8}{9}\,dx$.

Ricordiamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice *di classe* $\mathcal{C}^1$ in $x_0 \in A$ se è derivabile in $x_0$ con derivata ivi continua, e che non è detto che una funzione derivabile in $x_0$ sia sempre di classe $\mathcal{C}^1$ in $x_0$: si ricordi l'esempio di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(0) = 0$ e da $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ per $x \neq 0$, che è derivabile in $x_0 = 0$ (con $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$) ma $f'(x)$ non è continua in $x_0 = 0$ (infatti $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$ non esiste). In ogni caso, come preannunciato, ogni funzione di classe $\mathcal{C}^1$ è differenziabile (cioè derivabile).

**Differenziabilità per funzioni di due variabili** Il lavoro di rilettura fatto in precedenza per le funzioni di una variabile non è stato inutile, perché ci fornisce una direzione precisa lungo la quale generalizzare i concetti introdotti al caso di due variabili (ma sarebbe lo stesso per più di due variabili).

Similmente a prima, iniziamo chiarendo cosa significa che una funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è *affine*, ovvero "un polinomio di primo grado":

$$\text{esistono } m, n, k \in \mathbb{R} \text{ tali che} \qquad \varphi(x, y) = mx + ny + k \quad \text{per ogni } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Perciò *una funzione affine non è altro che una funzione il cui grafico* $z = \varphi(x, y)$ *è un piano non parallelo all'asse* $z$. In particolare, se $k = 0$ si dice che $\varphi(x) = mx + ny$ è una

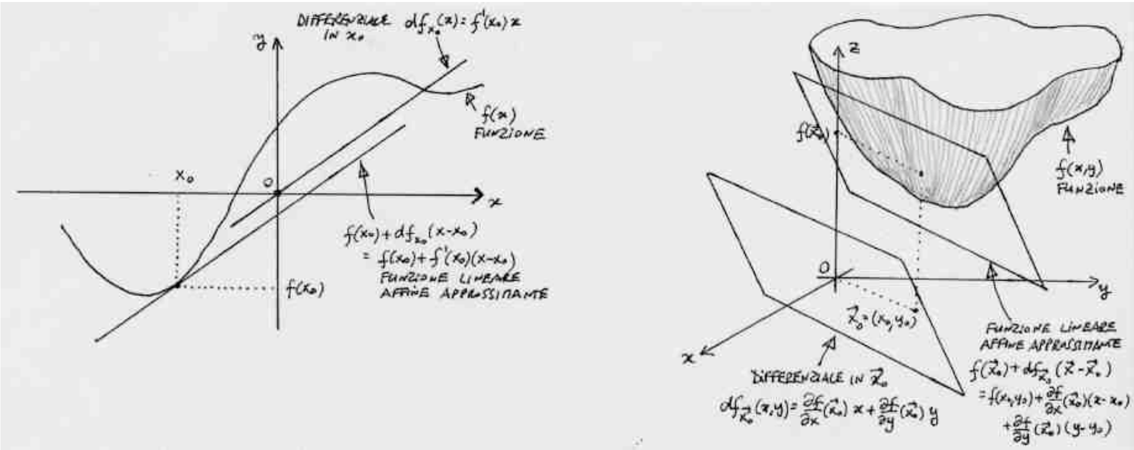


Figura 4.7: *Funzioni differenziabili in una e due variabili.*

funzione *affine omogenea*, o *lineare*, ed in tal caso il grafico sarà un piano passante per l'origine $(0,0)$. Anche qui, se si è interessati ad un particolare punto $\vec{x}_0$ del dominio di $\varphi$, può risultare comodo scrivere $\varphi(x,y)$ come

$$\varphi(x,y) = r + m(x - x_0) + n(y - y_0), \qquad \text{con } r = mx_0 + ny_0 + k :$$

in questa forma è chiaro che $\varphi(x_0, y_0) = r$.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$ si dirà *differenziabile* in un suo punto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ di accumulazione per $A$ se

$$(4.2) \qquad \text{esiste una funzione affine } \varphi(x,y) \text{ tale che} \qquad f(x,y) = \varphi(x,y) + o_{\vec{x}_0}(|\vec{x} - \vec{x}_0|) :$$

anche qui, l'idea è che, per $\vec{x} \in A$ vicino a $\vec{x}_0$, la funzione $f$ è efficacemente approssimabile (a meno di resto infinitesimo di ordine superiore a uno) con la funzione affine $\varphi(x,y)$ (vedi Figura 4.7(b)).
Scritta $\varphi(x,y) = a + b(x - x_0) + c(y - y_0)$, dalla condizione (4.2) si ricava $f(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0) = a$, e resta da capire solo chi siano i coefficienti $b$ e $c$. La funzione lineare $bx + cy$, il cui grafico in $\mathbb{R}^3$ è il piano passante per l'origine e parallelo al piano grafico della funzione lineare approssimante in $\vec{x}_0$, si dice *differenziale* di $f$ in $\vec{x}_0$ e si denota usualmente con

$$df_{\vec{x}_0}(x,y).$$

Si ha dunque, per definizione, $\varphi(x,y) = f(x_0, y_0) + df_{\vec{x}_0}(\vec{x} - \vec{x}_0)$.

La nozione di "differenziabilità nel punto" è precisamente l'analogo di "derivabilità nel punto" per funzioni a più variabili, come si vede nel seguente risultato, che non dimostriamo.

**Proposizione 4.4.2.** *Sia $A$ un aperto di $\mathbb{R}^2$, $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ di accumulazione per $A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione.*

(i) (Differenziabilità implica continuità ed esistenza delle derivate parziali) *Se $f$ è differenziabile in $\vec{x}_0$, allora $f$ è continua in $\vec{x}_0$, esistono le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$ e vale*

$$df_{x_0}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\,y, \tag{4.3}$$

*ovvero*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)(y - y_0) + o_{\vec{x}_0}(|\vec{x} - \vec{x}_0|). \tag{4.4}$$

(ii) (Teorema del differenziale totale) *Viceversa, se $f$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in $\vec{x}_0$ allora $f$ è differenziabile in $\vec{x}_0$.* (In particolare valgono tutte le affermazioni di (i).)

Come si può leggere sopra, il risultato della Proposizione 4.4.2(ii) è detto "Teorema del differenziale totale", e la ragione è la seguente. Analogamente a prima, definiamo *differenziale totale* di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, di classe $\mathcal{C}^1$ in ogni punto del suo dominio $A \subset \mathbb{R}^2$, l'espressione formale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,,$$

che ha un senso del tutto simile: se si altera la variabile $(x,y)$ di una piccola quantità $(dx,dy)$ da un suo valore $(x_0,y_0)$, la corrispondente piccola alterazione subìta dalla funzione $f(x,y)$ dal valore $f(x_0,y_0)$ è approssimativamente data da

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy.$$

Infatti, poiché $\varphi(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ approssima efficacemente $f(x,y)$ per $(x,y)$ vicino a $(x_0,y_0)$, per un piccolo spostamento $(dx,dy)$ a partire da $(x_0,y_0)$ si ha

$$\begin{aligned} df &= f(x_0+dx,y_0+dy) - f(x_0,y_0) \simeq \varphi(x_0+dx,y_0+dy) - f(x_0,y_0) \\ &= (f(x_0,y_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy) - f(x_0,y_0) = \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,dx + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,dy. \end{aligned}$$

**Esempi. (1)** Il differenziale totale di $f(x,y) = \frac{2x^2y}{3x-y}$ (definita al di fuori della retta $y = 3x$) è $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \frac{2xy(3x-2y)}{(3x-y)^2}\,dx + \frac{6x^3}{(3x-y)^2}\,dy$. Dunque, ad esempio, se si altera la variabile $(x,y)$ di una piccola quantità $(dx,dy)$ dal suo valore $(-1,-2)$, la corrispondente piccola alterazione di $f(x,y)$ dal valore $f(-1,-2) = 4$ è approssimativamente data da $df = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-2)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-2)\,dy = -4\,dx - 6\,dy$. **(2)** Diamo un esempio tratto dalla fisica. Si sa che il volume $V$ (in $\mathrm{m}^3$) occupato da un gas perfetto, la sua temperatura $T$ (in gradi Kelvin, ovvero i gradi °C più circa 273) e la sua pressione $p$ (in $\mathrm{N/m}^2$) sono legate dalla relazione $V = nR\frac{T}{p}$, ove $n$ è il numero di moli di gas presente ed $R$ è la costante dei gas. Il differenziale totale di $V(T,p)$ è $dV = nR(\frac{1}{p}\,dT - \frac{T}{p^2}\,dp)$: dunque, se un certo stato con temperatura e pressione $(T_0,p_0)$ si altera di una piccola quantità $(dT,dp)$, la corrispondente variazione di volume è $dV = nR(\frac{1}{p_0}\,dT - \frac{T_0}{p_0{}^2}\,dp)$.

Anche per le funzioni differenziabili e di classe $\mathcal{C}^1$ valgono le proprietà fondamentali delle funzioni continue: tranne il modulo, tutte le altre funzioni elementari sono di classe $\mathcal{C}^1$ nei punti in cui sono definite, e somme, prodotti, multipli scalari, quozienti, composizioni di funzioni differenziabili (risp. di classe $\mathcal{C}^1$) in un punto sono ancora funzioni differenziabili (risp. di classe $\mathcal{C}^1$) nel punto stesso.

**Esempi.** **(1)** La funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da $f(x,y)=\sin(x^2y^3)-e^{x-y}$ ha derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^3\cos(x^2y^3)-e^{x-y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^2y^2\cos(x^2y^3)+e^{x-y}$ sono continue ovunque, e dunque $f$ è differenziabile in ogni punto. Ad esempio si ha $df_{(0,0)}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y=-x+y$ e $df_{(-2,1)}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(-2,1)x+\frac{\partial f}{\partial y}(-2,1)y=-(4\cos 4+e^{-3})x+(12\cos 4+e^{-3})y$, con funzioni lineari tangenti rispettivamente $f(0,0)+df_{(0,0)}(x,y)=-1-x+y$ e $f(-2,1)+df_{(-2,1)}(x+2,y-1)=\sin 4-e^{-3}-(4\cos 4+e^{-3})(x+2)+(12\cos 4+e^{-3})(y-1)$. **(2)** La funzione $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data da $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ è ovunque continua; le sue derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sono continue in ogni punto $(x,y)\neq(0,0)$, e dunque $g$ è differenziabile in ogni $(x,y)\neq(0,0)$; invece le derivate parziali non esistono in $(0,0)$ (si ha infatti $\lim_{x\to 0^\pm}\frac{g(x,0)-g(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{|x|}{x}=\pm 1$ e $\lim_{y\to 0^\pm}\frac{g(0,y)-g(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0^\pm}\frac{|y|}{y}=\pm 1$), e dunque $g$ non è differenziabile in $(0,0)$. Ad esempio, si ha $dg_{(4,-3)}(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}(4,-3)x+\frac{\partial g}{\partial y}(4,-3)y=\frac{4x-3y}{5}$, con funzione lineare tangente $g(4,-3)+dg_{(4,-3)}(x-4,y+3)=5+\frac{4(x-4)-3(y+3)}{5}=\frac{4x-3y}{5}$; in generale, se $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ si calcola allo stesso modo che la funzione lineare tangente è $\frac{x_0x+y_0y}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$, il cui grafico passa sempre per l'origine $(0,0,0)$ (questo si spiega col fatto che il grafico di $g$ in $\mathbb{R}^3$ è il cono retto con vertice nell'origine generato dalla rotazione della semiretta $\{(x,y,z): x=0,\ y\geq 0,\ z=y\}$ attorno all'asse $z$).

**Differenziazione delle funzioni composte** Se $f:A\to\mathbb{R}$ è una funzione definita in un aperto $A\subset\mathbb{R}^2$ e $\alpha:=(\alpha_1,\alpha_2):I\to A$ è una curva continua allora, come detto, la funzione $f\circ\alpha:I\to\mathbb{R}$ può essere vista come la restrizione di $f$ alla curva immagine di $\alpha$ dentro $A$. In ipotesi di differenziabilità, può essere importante sapere come derivare $f\circ\alpha$ (funzione di una variabile) conoscendo le derivate $\alpha_1'(t)$ e $\alpha_2'(t)$ ed il differenziale $df(x,y)$. Notiamo allora la seguente importante

**Proposizione 4.4.3.** (Differenziazione delle funzioni composte, caso particolare) *Siano $A$ un aperto di $\mathbb{R}^2$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2):I\to A$ una curva derivabile in $A$ e $f:A\to\mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora la funzione $f\circ\alpha:I\to\mathbb{R}$ è derivabile in ogni $t\in I$ e vale*

$$(f\circ\alpha)'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha(t))\,\alpha_1'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha(t))\,\alpha_2'(t)\qquad\text{per ogni } t\in I. \tag{4.5}$$

*Dimostrazione.* La omettiamo, menzionando che è simile a quella del teorema di derivazione delle funzioni composte (Proposizione 3.3.4(iv)). □

**Esempio.** L'immagine di $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ data da $\varphi(t)=(\cos t,\sin t)$ è la circonferenza $\mathbb{S}^1$ (percorsa più volte); se $A$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ contenente $\mathbb{S}^1$ ed $f:A\to\mathbb{R}$ una qualsiasi funzione differenziabile, si può allora considerare la funzione ristretta $f\circ\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, e grazie a (4.5) si avrà $(f\circ\alpha)'(t)=-\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t,\sin t)\,\sin t+\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t,\sin t)\,\cos t$. Ad esempio, se $f(x,y)=x^2y$ si ottiene $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2$ e dunque $(f\circ\alpha)'(t)=-2\cos t\sin^2 t+\cos^3 t=\cos t(3\cos^2 t-2)$.

### 4.5 Derivate seconde e teorema di Schwarz

A partire da una funzione a due variabili $f(x,y)$ definita in qualche sottoinsieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ abbiamo costruito, dove possibile, le funzioni derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Anche di queste funzioni potremo (sempre, naturalmente, dove possibile) calcolare le derivate parziali $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$, che si diranno le *derivate* (parziali) *seconde* di $f$, e la funzione $f$ si dirà *di classe* $\mathcal{C}^2$ in un punto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$ se tutte le derivate parziali fino all'ordine due[70] esistono *e sono continue* nel punto $\vec{x}_0$. Le derivate $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ si diranno anche *derivate miste*: il seguente fondamentale risultato, che non dimostriamo, afferma che, sotto ragionevoli ipotesi di regolarità, *nelle derivate miste non conta l'ordine di derivazione.*

**Proposizione 4.5.1.** (Schwarz) *Se* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *e* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *esistono e sono continue in* $A$*, allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \qquad \text{per ogni } (x,y) \in A.$$

Se $f$ è di classe $\mathcal{C}^2$, è d'uso definire *matrice hessiana* di $f$ la seguente matrice di funzioni (che, grazie alla Proposizione 4.5.1, è simmetrica):

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Si noti allora che

$$\det H_f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Big)^2. \tag{4.6}$$

**Esempio.** **(0)** Se $f(x,y) = 2x^2y - xy^3$, derivando le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy - y^3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 - 3xy^2$ si ottiene $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6xy$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4x - 3y^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$: pertanto $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y & 4x-3y^2 \\ 4x-3y^2 & -6xy \end{pmatrix}$, da cui $\det H_f(x,y) = (4y)(-6xy) - (4x-3y^2)^2 = -16x^2 - 9y^4$, e dunque ad esempio $H_f(2,-1) = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$ e $\det H_f(2,-1) = -73$. **(1)** Se $f(x,y) = x^2y - \cos y^2$, derivando le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y\sin y^2$ si ottiene $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2\sin y^2 + 4y^2\cos y^2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$. **(2)** Se $f(x,y) = \sin(x^2y - \log y)$, da $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy\cos(x^2y - \log y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2 - \frac{1}{y})\cos(x^2y - \log y)$ si ottiene $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y(\cos(x^2y - \log y) - 2x^2\sin(x^2y - \log y))$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}\cos(x^2y - \log y) - (x^2 - \frac{1}{y})^2\sin(x^2y - \log y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x(\cos(x^2y - \log y) - y(x^2 - \frac{1}{y})\sin(x^2y - \log y)) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

### 4.6 Massimi e minimi di una funzione di due variabili

I concetti di massimo e minimo assoluto, e di punto di massimo e punto di minimo assoluto, hanno naturalmente senso anche per una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ definita in un qualunque insieme $X$; se inoltre su $X$ è definita una topologia, e dunque una famiglia di intorni per ogni elemento di $X$, hanno senso anche i concetti di massimo e minimo relativo (o locale), e di punto di massimo e punto di minimo relativo. In particolare, ciò vale per funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ definite in un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$. In ipotesi di continuità, vale ancora

[70] ovvero $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

**Proposizione 4.6.1.** (Teorema di Weierstrass) *Se $A$ è un sottoinsieme compatto* (ovvero, chiuso e limitato) *di $\mathbb{R}^2$, ogni funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo assoluti in $A$.* (In particolare, ogni funzione continua su un compatto è limitata.)

*Dimostrazione.* Analoga al caso di una variabile (vedi Proposizione 3.2.7). □

In ipotesi di differenziabilità, come nel caso di una variabile un ausilio decisivo per la ricerca degli estremanti locali ci viene dato dallo studio delle derivate parziali.

**Proposizione 4.6.2.** *Se $A$ è un aperto di $\mathbb{R}^2$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, condizione necessaria* (ma non sufficiente) *affinché un punto $\vec{x}_o = (x_0, y_0) \in A$ sia un estremante relativo per $f$ è che $\vec{x}_0$ sia un* punto stazionario *per $f$, ovvero che*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) = 0.$$

*Dimostrazione.* Se ad esempio $(x_0, y_0)$ è un punto di massimo relativo per $f$, a maggior ragione lo sarà per la restrizione $f_{y0}(t)$ di $f$ alla retta $y = y_0$ passante per $(x_0, y_0)$ e parallela all'asse $x$: dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y0}(x_0) = 0$. Analogamente si mostra che $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Come nel caso di una variabile, la condizione di stazionarietà non è però sufficiente: ad esempio, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ è un punto stazionario per $f(x, y) = x^2 - y^2$ ma non è un estremante relativo per $f$ (infatti, in ogni intorno di $(0, 0)$ vi sono punti del tipo $(x, 0)$ e del tipo $(0, y)$ nei quali $f$ è rispettivamente $> 0$ e $< 0$). □

Una volta trovati i punti stazionari, tra i quali vi sono i candidati ad essere estremanti locali per $f$ (il che è del tutto naturale: nei punti estremanti di una funzione differenziabile il piano tangente al grafico non può che essere orizzontale), resta il problema di determinare la *natura* di tali punti, il che si presenta più difficile che nel caso di una variabile (come appena visto nel caso di $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$, bisogna controllare la crescenza di $f$ in tutto un intorno del punto e non solo in alcune direzioni). Una importante risposta viene data nel caso in cui $f$ sia di classe $\mathcal{C}^2$, ovvero in cui abbia derivate prime e seconde continue in $A$ (si ricordi il determinante hessiano $\det H_f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right)^2$ definito in (4.6)):

**Proposizione 4.6.3.** *Siano $A$ un aperto di $\mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2$, ed $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto stazionario per $f$.*

(i) *Se*
$$\det H_f(\vec{x}_0) > 0 \qquad e \qquad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) < 0,$$
*allora $\vec{x}_0$ è un punto di massimo locale stretto per $f$;*

(ii) *Se*
$$\det H_f(\vec{x}_0) > 0 \qquad e \qquad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) > 0,$$
*allora $\vec{x}_0$ è un punto di minimo locale stretto per $f$;*

(iii) *Se*

$$\det H_f(\vec{x}_0) < 0$$

*allora $\vec{x}_0$ non è ne' un punto di massimo locale ne' un punto di minimo locale per $f$;*

(iv) *Se*

$$\det H_f(\vec{x}_0) = 0,$$

*allora non è possibile stabilire a questo livello la natura del punto stazionario $\vec{x}_0$, e serve uno studio locale più approfondito del segno di $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ vicino a $\vec{x}_0$. Tuttavia, si può almeno affermare che se*

$$\det H_f(\vec{x}_0) = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) > 0$$

*allora $\vec{x}_0$ non può essere un punto di massimo locale per $f$; e se*

$$\det H_f(\vec{x}_0) = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) < 0$$

*allora $\vec{x}_0$ non può essere un punto di minimo locale per $f$.*

**Esempi.** **(1)** La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ è di classe $\mathcal{C}^2$, ha derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, dunque l'unico punto critico $(0,0)$. Le derivate seconde sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, dunque $(0,0)$ è un punto di minimo locale stretto; pure la funzione $g(x,y) = x^2 - y^2$ è di classe $\mathcal{C}^2$, ha derivate parziali $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial g}{\partial y} = -2y$, dunque l'unico punto critico $(0,0)$, e le derivate seconde sono $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, dunque $(0,0)$ non è ne' un punto di minimo ne' di massimo. D'altra parte, queste conclusioni sono evidenti dall'esame del loro grafico che, come noto, per $f$ è un paraboloide con vertice in $(0,0)$ e per $g$ è un iperboloide con punto di sella in $(0,0)$. **(2)** Per le funzioni $f(x,y) = x^4 + y^4$, $g(x,y) = x^4 - y^2$ e $h(x,y) = -x^4 - y^4$ il criterio delle derivate seconde non permette di rispondere circa la natura dell'unico punto stazionario $(0,0)$. Tuttavia, quanto affermato durante la dimostrazione della Proposizione 4.6.3 appare ovvio da un facile esame della loro forma: infatti $f(x,y) > 0$ e $h(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$, mentre $g(x,0) > 0$ e $g(0,y) < 0$. **(3)** La funzione $f(x,y) = |x-1| + |y+2|$ non è differenziabile nel punto $(1,-2)$, e dunque non si possono usare per esso i risultati facenti uso delle derivate parziali: tuttavia, anche in questo caso è chiaro che esso è un punto di minimo assoluto per $f$, essendo $f(1,-2) = 0$ e $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (1,-2)$. **(4)** Si consideri $f(x,y) = (x^2 - y^2 + 2y)y$. Si ha $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3y^2 + 4y$: cercando i punti stazionari, si ha $x = 0$ (da cui $y = 0, \frac{4}{3}$, dunque i punti $(0,0)$ e $(0, \frac{4}{3})$) oppure $y = 0$ (da cui $x = 0$, dunque nuovamente il punto $(0,0)$). Si ottengono insomma i due punti stazionari $(0,0)$ e $(0, \frac{4}{3})$. Essendo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y + 4$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$, la Proposizione 4.6.3 permette di dire subito che $(0, \frac{4}{3})$ non è ne' di massimo ne' di minimo, mentre per $(0,0)$ ci permette solo di dire che non può essere un punto di massimo. Tuttavia, per capire la natura di $(0,0)$ basta studiare il segno di $f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) = (x^2 - y^2 + 2y)y$. Infatti la curva $x^2 - y^2 + 2y = 0$ rappresenta un'iperbole avente l'asse $y$ come asse, i punti $(0,0)$ e $(0,2)$ come vertici, il punto $(0,1)$ come centro e le rette $y = \pm x + 1$ come asintoti, dunque $f(x,y)$ è positiva quando $y > 0$ e $(x,y)$ sta sotto il ramo superiore dell'iperbole o quando $y < 0$ e $(x,y)$ sta sotto il ramo inferiore dell'iperbole, è nulla quando $y = 0$ oppure $(x,y)$ sta sull'iperbole, ed è negativa altrove: poiché ogni intorno di $(0,0)$ contiene punti in cui $f$ è positiva (dunque $f(x,y) > f(0,0)$) e punti in cui $f$ è negativa (dunque $f(x,y) < f(0,0)$), anche $(0,0)$ non è ne' di massimo ne' di minimo.

**Forme differenziali lineari.** Data una funzione differenziabile $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^2$, si è definito il suo differenziale totale come l'espressione formale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy.$$

Più in generale, date due qualsiasi funzioni $M : A \to \mathbb{R}$ e $N : A \to \mathbb{R}$, possiamo considerare una *forma differenziale (lineare)* in $A$, ovvero un'espressione formale

$$\omega = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

Pertanto il differenziale totale $df$ di una funzione differenziabile $f : A \to \mathbb{R}$ è un esempio di forma differenziale su $A$. Il problema è invece la cosa opposta: *data una qualsiasi forma differenziale $\omega = M\,dx + N\,dy$ su $A$, quando si può trovare una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $\omega = df$ ?* Una tale forma differenziale si dirà *esatta*, e la funzione $f$ si dirà *primitiva* di $\omega$: si tratta dunque di capire *come riconoscere se una data forma differenziale è esatta o no.* A tal fine, introduciamo il concetto di *integrale di una forma differenziale lungo un cammino.* Sia $\omega = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ una forma differenziale su $A$ ove $M, N : A \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, e sia $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [a,b] \to A$ una curva (o cammino) differenziabile[71] in $A$: si definisce allora

$$\int_\varphi \omega = \int_a^b \big(M(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\,\varphi_1'(t) + N(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\,\varphi_2'(t)\big)\,dt.$$

Affinché quella appena data sia una buona definizione, va controllata la seguente cosa.

**Proposizione 4.6.4.** *L'integrale $\int_\varphi \omega$ non dipende dalla parametrizzazione scelta per la curva, ma solo dal suo verso di percorrenza: ovvero, se $\alpha : [c,d] \xrightarrow{\sim} [a,b]$ è un diffeomorfismo con $\alpha(c) = a$ e $\alpha(d) = b$, e si pone $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \alpha : [c,d] \to A$, allora $\int_\varphi \omega = \int_{\widetilde{\varphi}} \omega$.*

*Dimostrazione.* Basta usare le definizioni ed il cambio di variabile $t = \alpha(\tau)$. $\square$

**Esempio.** I punti $(0,0)$ e $(3,1)$ sono uniti da ognuno dei tre cammini $\varphi_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ e $\varphi_3 : [0,3] \to \mathbb{R}^2$ dati rispettivamente da $\varphi_1(t) = (3t, t)$ (il segmento), $\varphi_2(t) = (6t, 0)$ per $0 \le t \le \frac{1}{2}$ e $\varphi_2(t) = (3, 2t-1)$ per $\frac{1}{2} \le t \le 1$ (la spezzata passante per $(3,0)$) e $\varphi_3(t) = (t, t^2 - \frac{8}{3}t)$ (l'arco di parabola $y = x^2 - \frac{8}{3}x$). Consideriamo ora le forme $\omega = 2xy\,dx + (x^2 - 6y)\,dy$ e $\psi = (x-y)\,dx + (1-2x^2)\,dy$, e calcoliamo il loro integrale lungo di essi. Si ha $\int_{\varphi_1} \omega = \int_0^1 (2(3t)t \cdot 3 + (9t^2 - 6t) \cdot 1)\,dt = \int_0^1 (27t^2 - 6t)\,dt = 6$, $\int_{\varphi_2} \omega = \int_0^{1/2} (2(6t)(0) \cdot 6 + (36t^2 - 6(0)) \cdot 0)\,dt + \int_{1/2}^1 (2(3)(2t-1) \cdot 0 + (9 - 6(2t-1)) \cdot 2)\,dt = \int_{1/2}^1 (2(15 - 12t)\,dt = 6$ e $\int_{\varphi_3} \omega = \int_0^3 (2t(t^2 - \frac{8}{3}t) \cdot 1 + (t^2 - 6(t^2 - \frac{8}{3}t)) \cdot (2t - \frac{8}{3}))\,dt = \frac{2}{3} \int_0^3 (-12t^3 + 60t^2 - 64t)\,dt = 6$; si ha poi $\int_{\varphi_1} \psi = \int_0^1 ((3t - t) \cdot 3 + (1 - 18t^2) \cdot 1)\,dt = \int_0^1 (-18t^2 + 6t + 1)\,dt = -2$, $\int_{\varphi_2} \psi = \int_0^{1/2} ((6t - 0) \cdot 6 + (1 - 72t^2) \cdot 0)\,dt + \int_{1/2}^1 (3 - (2t-1)) \cdot 0 + (1 - 18) \cdot 2)\,dt = -4$ e $\int_{\varphi_3} \psi = \int_0^3 (t - (t^2 - \frac{8}{3}t)) \cdot 1 + (1 - 2t^2) \cdot (2t - \frac{8}{3}))\,dt = -30$. Si sarà certamente notato che per $\omega$ si sono ottenuti tre risultati uguali, mentre per $\psi$ no: la ragione sarà chiara tra non molto.

Gli integrali di forme differenziali esatte hanno importanti proprietà, che andiamo ora ad evidenziare.

**Proposizione 4.6.5.** *Siano $\omega$ una forma differenziale esatta in $A$, e $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [a,b] \to A$ un cammino differenziabile in $A$.*

(i) *Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi primitiva di $\omega$* (ovvero $\omega = df$), *allora*

$$\int_\varphi \omega = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) \ :$$

*in particolare, l'integrale di una forma differenziale esatta lungo un cammino $\varphi$ dipende solo dagli estremi $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ del cammino, e non dal percorso fra essi.*

[71] o almeno differenziabile "a tratti": ovvero, tranne un numero finito di punti angolosi.

(ii) *Se $\varphi$ è un circuito*[72], *allora* $\int_\varphi \omega = 0$.

(iii) *Se $A$ è* connesso[73], *allora due primitive di $A$ differiscono per una costante additiva. Inoltre, tutte le primitive di $\omega$ sono della seguente forma $f(x,y)$: fissato un qualsiasi punto base $(x_0, y_0) \in A$ e considerato un qualsiasi cammino $\varphi_{(x,y)}$ da $(x_0, y_0)$ a $(x,y)$, si ponga*

$$f(x,y) = \int_{\varphi_{(x,y)}} \omega.$$

*Dimostrazione.* (i) Usando (4.5) ed il Teorema Fondamentale del Calcolo (Teorema 3.5.14), si ha $\int_\varphi df = \int_a^b \big(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t))\, \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t))\, \varphi_2'(t)\big)\, dt = \int_a^b (f \circ \varphi)'(t)\, dt = (f \circ \varphi)(b) - (f \circ \varphi)(a)$. (ii) Discende subito da (i), perché $\varphi(b) = \varphi(a)$. (iii) Se $f$ e $\tilde{f}$ sono due primitive di $\omega$, da (i) si ricava $f(x,y) - f(x_0, y_0) = \int_{\varphi_{(x,y)}} \omega = \tilde{f}(x,y) - \tilde{f}(x_0, y_0)$, da cui $\tilde{f}(x,y) = f(x,y) + k$ con $k = \tilde{f}(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)$. Omettiamo la dimostrazione dell'ultima affermazione. □

Resta però sempre da trovare una maniera semplice per appurare se una data forma differenziale sia esatta o no: a questo risponde, nel caso di forme differenziali a coefficienti $\mathcal{C}^1$ e di dominio di forma particolare, la seguente proposizione.

**Proposizione 4.6.6.** (Criterio di esattezza di Eulero) *Siano $A \subset \mathbb{R}^2$* connesso *e* semplicemente connesso[74] *ed $\omega = M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy$ una forma differenziale in $A$ con $M, N : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$. Allora $\omega$ è esatta se e solo se essa è* chiusa*, ovvero*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y).$$

*Dimostrazione.* Se $\omega$ è esatta allora essa è anche chiusa: infatti, se $\omega = df$ si avrà $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$, da cui $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial N}{\partial x}$, e basta dunque applicare il Teorema di Schwarz (Proposizione 4.5.1). Il viceversa si dimostra così: assumendo per semplicità $A = \mathbb{R}^2$, ispirati dalla Proposizione 4.6.5 fissiamo un punto base (ad esempio, $(0,0)$ per semplicità) e, preso un $(x,y)$, consideriamo come cammino da $(0,0)$ a $(x,y)$ il segmento $\varphi_{(x,y)} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dato da $\varphi_{(x,y)}(t) = (tx, ty)$ (si noti che $\varphi_{(x,y)}(0) = (0,0)$ e $\varphi_{(x,y)}(1) = (x,y)$). Ci resta da mostrare che effettivamente $f(x,y) = \int_{\varphi_{(x,y)}} \omega$ è una primitiva di $\omega$. Per definizione si ha $f(x,y) = \int_0^1 (x\, M(tx,ty) + y\, N(tx,ty))\, dt$: si ha allora[75] $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(x\, M(tx,ty) + y\, N(tx,ty))\, dt = \int_0^1 (M(tx,ty) + x\, t \frac{\partial M}{\partial x}(tx,ty) + y\, t \frac{\partial N}{\partial x}(tx,ty))\, dt = \int_0^1 (t\, M(tx,ty))'\, dt = (t\, M(tx,ty))_{t=1} - (t\, M(tx,ty))_{t=0} = M(x,y)$. In modo analogo si dimostra che $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$, da cui $\omega = df$ come voluto. □

Cerchiamo dunque di riassumere come procedere per capire se una forma differenziale $\omega = M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy$, con $M, N : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$, è esatta:

(1) vedere se $\omega$ è chiusa, ovvero se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$;

(2) se è chiusa, e $A$ è connesso e semplicemente connesso, allora $\omega$ è esatta;

[72] Un circuito è un cammino chiuso, ovvero $\varphi : [a,b] \to A$ tale che $\varphi(a) = \varphi(b)$.

[73] Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice *connesso* se, presi due qualsiasi suoi punti, esiste una curva tra essi tutta contenuta in $A$. Ad esempio, se $A$ è tutto il piano meno una retta allora non è connesso; mentre se $A$ è tutto il piano meno una semiretta oppure tutto il piano meno un punto allora è connesso.

[74] Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ si dice *semplicemente connesso* se ogni circuito (curva chiusa) dentro $A$ si può contrarre ad un solo punto in modo continuo e senza mai uscire da $A$. Ad esempio, se $A$ è tutto il piano meno una retta o meno una semiretta allora $A$ è semplicemente connesso; ma non lo è se $A$ è tutto il piano meno un punto, o meno più punti, o meno una palla.

[75] Si usa ora un risultato detto di "derivazione di integrale dipendente da un parametro": in queste ipotesi, la derivata parziale $\frac{\partial}{\partial x}$ può essere portata sotto il segno di integrale.

(3) per trovare una sua primitiva $f(x,y)$, cioè una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $\omega = df$, ovvero $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ (ricordare che una primitiva è definita a meno di costanti additive) si fissa un punto base $(x_0, y_0) \in A$, un qualsiasi cammino $\varphi_{(x,y)}$ da $(x_0, y_0)$ a $(x,y)$ e si calcola

$$f(x,y) = \int_{\varphi_{(x,y)}} \omega.$$

Ad esempio, si può scegliere il segmento $\{((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty) : t \in [0,1]\}$ tra $(x_0, y_0)$ e $(x,y)$ (a patto che sia tutto contenuto in $A$), ottenendo

$$\begin{aligned} f(x,y) = \int_0^1 ((x - x_0)\, M((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty) \\ +(y - y_0)\, N((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty))\, dt, \end{aligned} \tag{4.7}$$

oppure la spezzata $\{((1-t)x_0 + tx, y_0) : t \in [0,1]\} \cup \{(x, (1-t)y_0 + ty) : t \in [0,1]\}$ tra $(x_0, y_0)$ e $(x,y)$, passante per $(x, y_0)$ (sempre a patto che sia tutta contenuta in $A$), ottenendo

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int_0^1 (x - x_0)\, M((1-t)x_0 + tx, 0)\, dt \,+\, \int_0^1 (y - y_0)\, N(x, (1-t)y_0 + ty)\, dt \\ &= \int_{x_0}^x M(\xi, 0)\, d\xi \,+\, \int_{y_0}^y N(x, \eta)\, d\eta. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Naturalmente è il caso di scegliere il punto base nel modo più comodo possibile: ad esempio, prendendo $(x_0, y_0) = (0,0)$, le espressioni (4.7) e (4.8) si semplificano come

$$f(x,y) = \int_0^1 (x\, M(tx, ty) + yN(tx, ty))\, dt,$$

e

$$f(x,y) = \int_0^1 x\, M(tx, 0)\, dt \,+\, \int_0^1 y\, N(x, ty)\, dt = \int_0^x M(\xi, 0)\, d\xi \,+\, \int_0^y N(x, \eta)\, d\eta.$$

(4) In alternativa, c'è un "metodo di integrazione parziale", che spesso è il più pratico:

- da $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ si ricava $f(x,y) = \int M(x,y)dx \; + \varphi(y)$, con $\varphi(y)$ funzione da determinare;
- da $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ si trova allora $\int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx \; + \varphi'(y) = N$, da cui $\varphi'(y) = N - \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx$;
- essendo $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, si ha $\frac{\partial}{\partial x}(N - \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(\int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$, ovvero il secondo membro non dipende da $x$: dunque, integrando rispetto a $y$ si trova ad esempio $\varphi(y) = \int (N - \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx)\, dy$, e dunque

$$f(x,y) = \int M(x,y)\, dx + \int N(x,y)\, dy - \int \left( \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx \right) dy.$$

- Naturalmente si può partire da $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$, ottenendo lo stesso risultato.

**Esempi. (1)** Riprendiamo gli esempi $\omega = 2xy\, dx + (x^2 - 6y)\, dy$ e $\psi = (x - y)\, dx + (1 - 2x^2)\, dy$ visti in un esercizio precedente. Se $\omega = 2xy\, dx + (x^2 - 6y)\, dy$ si ha $A = \mathbb{R}^2$, $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = x^2 - 6y$. Essendo $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$, la forma $\omega$ è chiusa e dunque (essendo $A$ connesso e semplicemente connesso) esatta. Calcoliamone una primitiva in tre modi: nel primo integriamo lungo la spezzata che da $(0,0)$ porta a $(x,y)$ passando per $(x,0)$, e guardando (4.8) si ha $f(x,y) = \int_0^x M(t,0)\, dt + \int_0^y N(x,t))\, dt =$

$\int_0^x 0\,dt + \int_0^y (x^2-6t)\,dt = x^2y-3y^2$; nel secondo integriamo lungo il segmento che da $(0,0)$ porta a $(x,y)$, e usando (4.7) otteniamo ancora $f(x,y)=\int_0^1 (x\cdot 2(tx)(ty)+y(t^2x^2-6ty))\,dt = \int_0^1 (3x^2yt^2-6y^2t)\,dt = x^2y[t^3]_0^1 - 3y^2[t^2]_0^1 = x^2y-3y^2$; nel terzo, col metodo di integrazione parziale, da $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)=2xy$ si ricava $f(x,y)=x^2y+\varphi(y)$, e da $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=x^2-6y$ si ha $x^2+\varphi'(y)=x^2-6y$, da cui $\varphi'(y)=-6y$, da cui $\varphi(y)=-3y^2$, e di nuovo $f(x,y)=x^2y-3y^2$. Invece $\psi$ non è chiusa (essendo $\frac{\partial}{\partial y}(x-y)=-1\neq -4x=\frac{\partial}{\partial x}(1-2x^2)$), e dunque non è esatta. Ciò spiega come mai, nell'esercizio, si erano trovati tre valori diversi per $\int_{\varphi_1}\psi$, $\int_{\varphi_2}\psi$ e $\int_{\varphi_3}\psi$, mentre si era trovati valori uguali $\int_{\varphi_1}\omega=\int_{\varphi_2}\omega=\int_{\varphi_3}\omega=6$; si noti, come previsto, che $f(3,1)-f(0,0)=6-0=6$. **(2)** Sia $\omega=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$, con $M(x,y)=\log(2x-y^2)+\frac{2x}{2x-y^2}$ e $N(x,y)=-2(\frac{xy}{2x-y^2}+1)$. Tale forma è definita su $A=\{(x,y): x>y^2/2\}$, punti interni alla parabola $x=y^2/2$ (esclusa). Si ha $\frac{\partial M}{\partial y}=-2y\frac{4x-y^2}{(2x-y^2)^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$, dunque $\omega$ è chiusa; essendo a connesso e semplicemente connesso, $\omega$ è anche esatta. Cerchiamo una primitiva $f(x,y)$, usando il metodo di integrazione parziale: da $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)=x\frac{-2y}{2x-y^2}-2$ integrando rispetto a $y$ si ricava facilmente $f(x,y)=x\log(2x-y^2)-2y+\varphi(x)$ con $\varphi(x)$ da determinare; poi, da $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ si ricava $\log(2x-y^2)+\frac{2x}{2x-y^2}+\varphi'(x)=\log(2x-y^2)+\frac{2x}{2x-y^2}$ da cui $\varphi'(x)=0$, ovvero $\varphi(x)$ costante. In alternativa, scegliamo un punto base in $A$ (stavolta non può essere $(0,0)$, perciò prendiamo ad esempio $(1,0)$) ed integriamo lungo la spezzata che da $(1,0)$ porta a $(x,y)\in A$ passando per $(x,0)$: usando (4.8) si ottiene ancora $f(x,y)=\int_1^x(\log 2\xi+1)\,d\xi+\int_0^y -2(\frac{x\eta}{2x-\eta^2}+1)\,d\eta=(\xi(\log 2\xi-1)+\xi]_1^x+(x\log(2x-\eta^2)-2\eta]_0^y = x\log 2x + x\log(2x^2-y^2)-2y-x\log 2x = x\log(2x-y^2)-2y$. Dunque una primitiva di $\omega$ è $f(x,y)=x\log(2x-y^2)-2y$; ad esempio, l'integrale di $\omega$ lungo un qualsiasi cammino in $A$ congiungente i punti $(1,1)$ e $(2,0)$ vale $f(1,1)-f(2,0)=-2-4\log 2\sim -4,8$. **(3)** L'ipotesi di semplice connessione è da tenere presente per poter dire con sicurezza che una forma chiusa è anche esatta: ad esempio, la forma $\omega=\frac{y}{x^2+y^2}\,dx-\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ è chiusa (verificare) nel sottoinsieme non semplicemente connesso $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ma non è ivi esatta. Per mostrare ciò, ci basterebbe ad esempio prendere un circuito $\varphi$ in $A$ e mostrare che $\int_\varphi \omega\neq 0$: questo escluderebbe che $\omega$ possa essere esatta (vedi Proposizione 4.6.5(ii)). Consideriamo allora $\varphi:[0,2\pi]\to A$, $\varphi(t)=(\cos t,\sin t)$ (circuito in $A$, con $\varphi(0)=\varphi(1)=(1,0)$): allora $\int_\varphi\omega=\int_0^{2\pi}(\frac{\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot(-\sin t)-\frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cdot(\cos t))\,dt=-\int_0^{2\pi}\,dt=-2\pi\neq 0$.