SCALARI E VETTORI

Alcune grandezze fisiche (per esempio, la *massa* di un oggetto, la posizione di un punto) possono essere caratterizzate matematicamente mediante un numero. Tali grandezze o osservabili sono dette **scalari**. Esistono tuttavia osservabili per le quali un solo numero non è sufficiente per dare una descrizione completa. Ad esempio, lo *spostamento* di un punto è un ente geometrico che viene compiutamente caratterizzato se ne vengono assegnate non solo la *lunghezza* ma anche la *direzione* e il *verso*. Per questo tipo di osservabili non valgono le regole dell'algebra ordinaria (algebra dei numeri): occorre introdurre nuove regole di calcolo. Gli spostamenti e tutte le osservabili che, come questi, possono essere rappresentate da segmenti orientati, e per le quali abbia senso lo stesso tipo di algebra utile per gli spostamenti, sono dette **vettori**. Esse vengono indicate mediante lettere, maiuscole o minuscole, in grassetto (es.: **A, a**) o sottolineate (A, a) o, ancora, disegnando una freccetta sopra la lettera ($\vec{a}$, $\vec{A}$). Due segmenti orientati che hanno uguale lunghezza, direzione e verso si dicono equipollenti: questo ci permette di "trasportare" vettori parallelamente a se' stessi per eseguire graficamente le operazioni che stiamo per definire, senza cambiarne il risultato.
Vediamo ora come sono definite le operazioni fra vettori.

SOMMA DI VETTORI

Dati due vettori **A** e **B** come in fig. 1, definiamo somma **A**+**B**=**C** il vettore risultante **C** ottenuto tracciando una freccia con la coda nella coda di **A** e la punta nella punta di **B.**

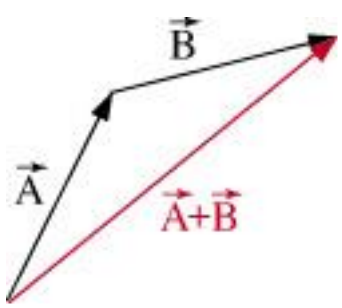


fig.1

Per fare ciò se i due vettori non sono consecutivi devo prima riportare il vettore **B** parallelamente a se stesso in modo che la sua coda coincida con la punta di **A**

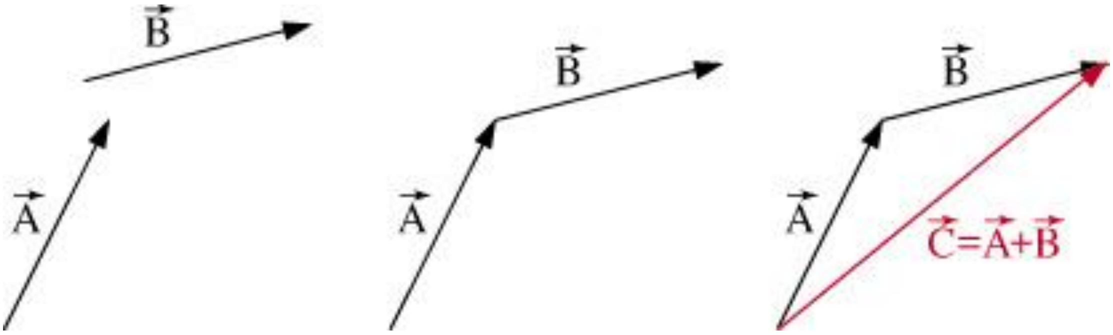


fig. 2

Possiamo ora definire anche la differenza di due vettori: questa equivale alla somma dei vettori **A** e –**B** (vedi fig. 3).

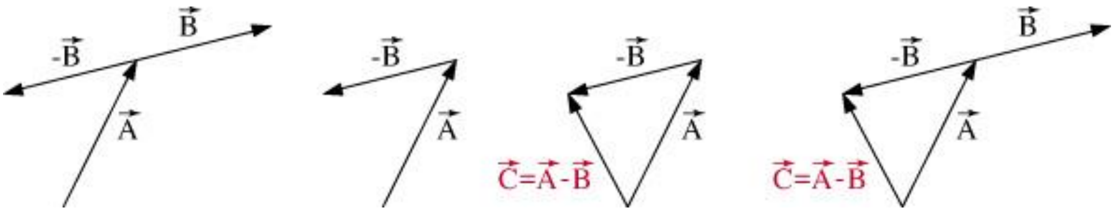


fig. 3

Questa regola di somma dei vettori è detta "punta-coda".

Un'altra regola utile, che ovviamente dà lo stesso risultato, è la regola del parallelogramma: si tracciano i vettori **A** e **B** con le origini coincidenti. Si costruisce il parallelogramma di lati |**A**| e |**B**| : la diagonale uscente dall'origine comune O rappresenta il vettore somma. La differenza è il vettore corrispondente all'altra diagonale, come mostra la figura 3, con verso opportuno a seconda che l'operazione da eseguire sia **A-B** o **B-A** .

La somma così definita è commutativa e associativa.

Definiamo quindi vettori tutti gli enti matematici rappresentabili mediante "frecce" che obbediscono alla regola di somma sopra definita.

Se poi vogliamo calcolare la lunghezza del vettore somma e gli angoli formati tra i vettori **A**, **B** e **C**, basterà ricorrere alle regole della trigonometria (vedi TRIGONOMETRIA) .

PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Se pensiamo, ad esempio, di “moltiplicare per 2 un vettore”, ci immaginiamo un vettore di lunghezza doppia e direzione e verso identici al vettore di partenza: questo è ciò che si intende per moltiplicazione di un vettore per uno scalare (numero!). Dato dunque un vettore **A** e uno scalare k, il vettore **S** = k**A** risulta avere:

a) modulo kA

b) direzione identica alla direzione di **A**

c) verso concorde con **A** se k >0 e opposto ad **A** se k<0.

COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE

Limitiamoci per ora al caso piano: il caso tridimensionale verrà trattato in seguito come ovvia estensione di questo.

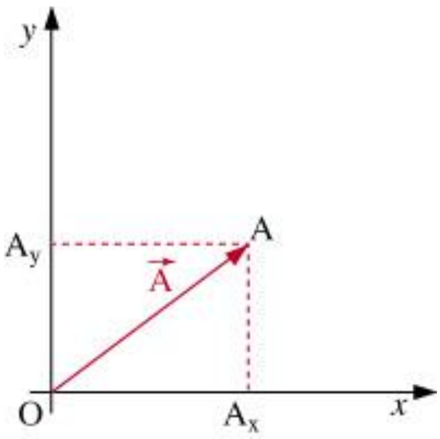


fig. 4

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy (vedi figura 4) e un vettore $\overrightarrow{OA}$. Le componenti del vettore $\overrightarrow{OA}$ rispetto al sistema di riferimento considerato sono le proiezioni del punto A: A_x ed A_y sui due assi cartesiani. Possiamo considerare dunque che il vettore $\overrightarrow{OA}$ sia dato dalla somma (con la regola del parallelogramma) di due vettori $\overrightarrow{A_x}\ e\ \overrightarrow{A_y}$ paralleli ai due assi. Il vettore $\overrightarrow{A_x}$ può essere considerato il risultato del prodotto di uno scalare di lunghezza pari al modulo di $\overrightarrow{A_x}$ per un vettore ($\vec{u}_x$) di lunghezza unitaria, direzione coincidente e verso concorde con l’asse x . Il vettore $\vec{u}_x$ è chiamato versore dell'asse x. Analogamente, il vettore $\vec{u}_y$ avrà lunghezza unitaria, direzione coincidente e verso concorde con l'asse y. Dunque possiamo scrivere: $\overrightarrow{OA} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y$.

L'estensione al caso tridimensionale permette di scrivere il vettore A nella forma: $\overrightarrow{OA} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z$ (fig. 5).

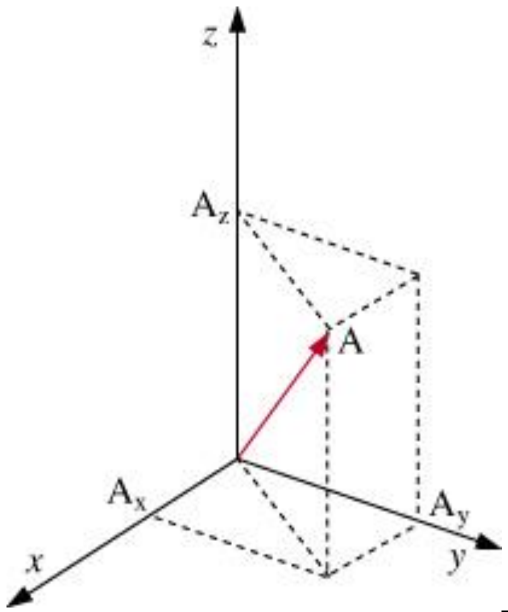


fig. 5

Facendo uso di questa rappresentazione, la regola di somma di vettori può essere data anche nella seguente forma:

$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{u}_x + (A_y + B_y)\vec{u}_y + (A_z + B_z)\vec{u}_z$.

Conseguenze:

a) tutti i vettori paralleli ad $\vec{A}$ saranno del tipo: $kA_x\vec{u}_x + kA_y\vec{u}_y$ con $k \neq 0$

b) tutti i vettori perpendicolari ad $\vec{A}$ saranno del tipo: $-kA_y\vec{u}_x + kA_x\vec{u}_y$ con $k \neq 0$

(avranno cioè uguale modulo ma saranno ruotati di + $\pi/2$)

Passiamo ora a definire altre operazioni fra vettori: il prodotto scalare e il prodotto vettore.

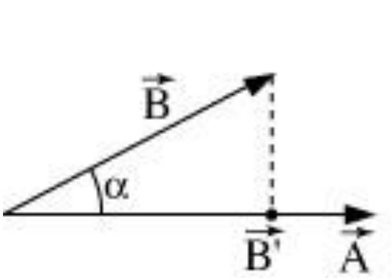
PRODOTTO SCALARE

Dati due vettori A e B espressi mediante le loro componenti cartesiane, definiamo prodotto scalare dei vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e lo indichiamo col simbolo **.** lo scalare

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Un altro modo possibile per calcolare il prodotto scalare di due vettori, quando se ne conoscano i moduli e l'angolo α formato tra essi è il seguente:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\alpha \,.$$



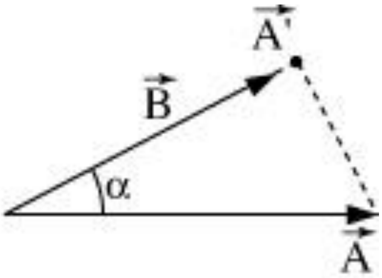


fig. 6

Dalla figura 6 si può notare che $|\vec{B}| \cos\alpha$ rappresenta la proiezione di $\vec{B}$ su $\vec{A}$ (o viceversa, la proiezione di $\vec{A}$ su $\vec{B}$). La definizione data si applica anche a vettori liberi, l'angolo α è quello che essi formano quando vengono trasportati parallelamente a sé stessi in modo da avere lo stesso punto iniziale.

Quindi il prodotto scalare è il prodotto della lunghezza di uno dei due vettori per la proiezione dell'altro sulla retta del primo.

Conseguenze della definizione di prodotto scalare:

a) il prodotto del vettore $\vec{A}$ per se stesso è: $\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}$

b) l'angolo tra due vettori è dato da: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|A| \cdot |B|}$

c) il versore associato ad $\vec{A}$ è dato da: $\vec{u}_A = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \dfrac{A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y}{\sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}}}$

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

a) è commutativo : $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$.

b) è nullo se i due vettori sono perpendicolari fra loro (cosα=0), se $\vec{A}$ o $\vec{B}$ sono nulli $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}=0$ (anche se l'angolo α in questo caso non è definito).

c) e' distributivo rispetto alla somma: $\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})$

d) $(\lambda\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(\lambda\vec{B})=\lambda(\vec{A}\cdot\vec{B})$

PRODOTTO VETTORE

Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ formanti un angolo α, definiamo prodotto vettore di $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e lo indichiamo col simbolo × il vettore $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$: $|\vec{C}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$, direzione di $\vec{C}$ perpendicolare al piano contenente $\vec{A}$ e $\vec{B}$, e verso come mostrato in figura 7: se $\vec{A}$ e $\vec{B}$ appartengono al piano xy di un sistema di riferimento cartesiano destrorso, $\vec{C}$ è diretto lungo z : positivo se ruotando $\vec{A}$ fino a sovrapporlo a $\vec{B}$ percorrendo l'angolo di rotazione minimo, il verso di rotazione è antiorario, negativo in caso contrario.

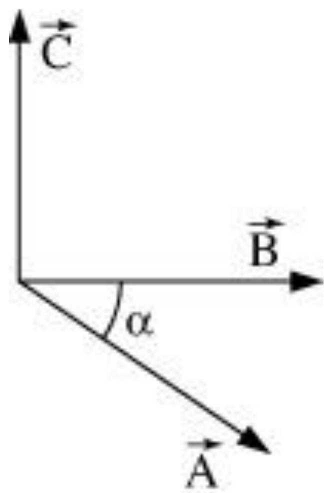


fig. 7

Se i vettori sono dati mediante le loro componenti cartesiane, il prodotto vettore può essere definito anche come:

$$\vec{C}=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{u}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{u}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{u}_z$$

questa espressione coincide col risultato del calcolo del determinante della matrice così costruita:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Il prodotto vettore gode delle seguenti <u>proprietà</u>:

a) è anti-commutativo: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

b) è nullo quando $\vec{A}$ è parallelo a $\vec{B}$ (α=0,π, quindi sinα=0)

c) e' distributivo rispetto alla somma: $\vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C})$

d) $\lambda\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \lambda\vec{B} = \lambda(\vec{A} \times \vec{B})$

Inoltre possiamo calcolare il "doppio prodotto vettore" come:

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$