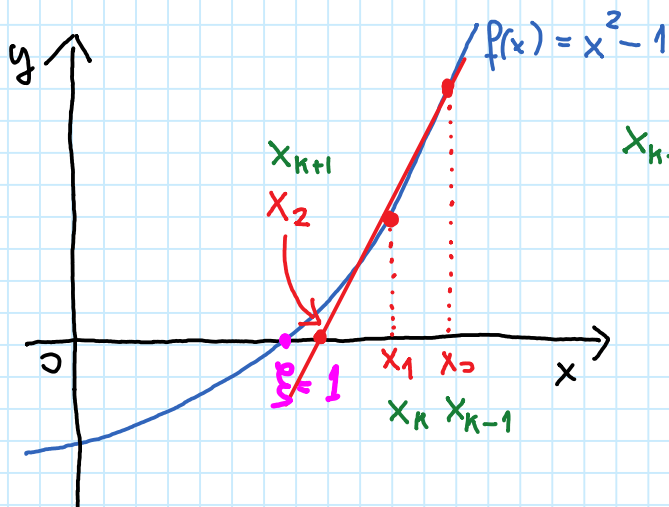


SECONTE VARIAZILI MATLAB

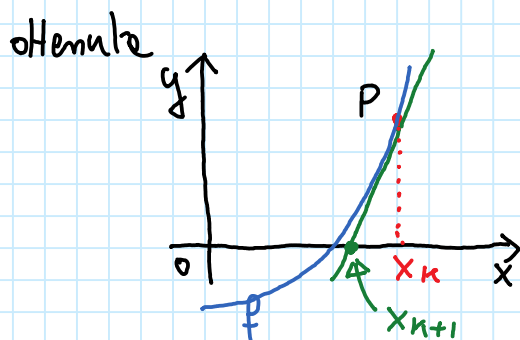


$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

METODO DI NEWTON IN PIÙ VARIAZILI

Newton usa la successione x_n

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



C'è un altro modo per ottenere l'iterazione di Newton:

$f(x) = 0$ e uso sviluppo di Taylor con punto iniziale x_n

$$\boxed{f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)} + o((x - x_n)) = 0$$

elimino

$$\Rightarrow x - x_n = - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \underset{x_{k+1}}{\boxed{x}} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Codice secante

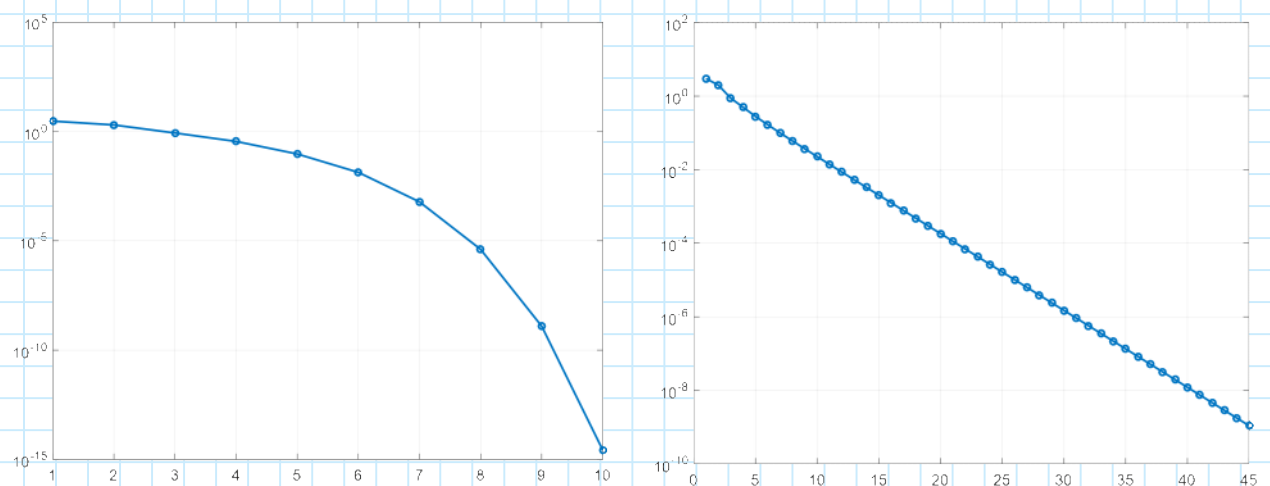
lunedì 2 maggio 2016 12:14

```
function x = secanti(f,x0,x1,toll,kmax)
%SECANTI metodo delle secanti variabili
% X = SECANTI(F,X0,X1,TOLL,KMAX) da' in
% uscita la successione delle iterate generate
% dal metodo delle secanti partendo da x0 e x1
% e arrestandosi quando | x(k)-x(k-1) | < toll oppure
% k > kmax.

x = [x0;x1];
k = 2;
while( abs( x(k)-x(k-1)) >= toll && k <= kmax)
    x(k+1) = x(k) - f(x(k)) * (x(k) - x(k-1)) / (f(x(k)) - f(x(k-1)));
    k = k+1;
end

% script di prova per le secanti

f = inline('(x-1).*log(x)');
xi = 1;
x0 = 4;
x1 = 3;
toll = 1E-9;
kmax = 100;
x = secanti(f,x0,x1,toll,kmax);
semilogy(abs(x-xi),'o-')
grid on
```



Considero ora il caso di più funzioni ognuna dipendente da più variabili. Per semplicità considero DUE funzioni in DUE variabili e voglio risolvere il SISTEMA

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{f}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \text{con } \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}, \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sostituisco le $\underline{f}$, ossia f_1 e f_2 , con lo sviluppo, arrestato al 1° ordine, di Taylor; poniamo

$$f_{1x} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad f_{2x} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

$$f_{1y} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad f_{2y} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

$$\underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f_1(x_{1k}, x_{2k}) + f_{1x}(x_{1k}, x_{2k})(x_1 - x_{1k}) + f_{1y}(x_{1k}, x_{2k})(x_2 - x_{2k}) \cong 0 \\ f_2(x_{1k}, x_{2k}) + f_{2x}(x_{1k}, x_{2k})(x_1 - x_{1k}) + f_{2y}(x_{1k}, x_{2k})(x_2 - x_{2k}) \cong 0 \end{cases}$$

Risolvero rispetto a $(x_1 - x_{1k}, x_2 - x_{2k})^T$:

$$\begin{pmatrix} f_{1x}(x_{1k}, x_{2k}) & f_{1y}(x_{1k}, x_{2k}) \\ f_{2x}(x_{1k}, x_{2k}) & f_{2y}(x_{1k}, x_{2k}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{1k} \\ x_2 - x_{2k} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(x_{1k}, x_{2k}) \\ f_2(x_{1k}, x_{2k}) \end{pmatrix}$$

$$\underline{J}(x_{1k}, x_{2k})$$

Risolvero il sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{1k} \\ x_2 - x_{2k} \end{pmatrix} = - \left(\underline{J}(x_{1k}, x_{2k}) \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x_{1k}, x_{2k}) \\ f_2(x_{1k}, x_{2k}) \end{pmatrix}$$

prendo questi valori come $x_{1,k+1}$ e $x_{2,k+1}$

METODO DI NEWTON (per sistemi lineari)

$\underline{x}_0$ punto di partenza (è un VETTORE!)

$$\underline{x}_1 - \underline{x}_0 = - \underline{J}^{-1}(\underline{x}_0) \cdot \underline{f}(\underline{x}_0) \Rightarrow \underline{x}_1$$

$$k = 2$$

while ($\| \underline{x}(k) - \underline{x}(k-1) \| \geq \text{tol}$ && $k \leq k_{\max}$)

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k = - \underline{J}^{-1}(\underline{x}_k) \cdot \underline{f}(\underline{x}_k)$$

$$k = k + 1$$

end

NORME IN MATLAB: `norm(x, 2)` ← Euclidean (default)
'inf'

$$\underline{x} = [-1 \ 0 \ 2], \quad n = 3$$

$$\| \underline{x} \|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = |-1| + |0| + |2| = 3 = \text{norm}(\underline{x}, 1)$$

$$\| \underline{x} \|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \left((-1)^2 + 0^2 + 2^2 \right)^{1/2} = \sqrt{5} = \text{norm}(\underline{x}, 2) = \text{norm}(\underline{x})$$

$$\| \underline{x} \|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i| = \max(|-1|, |0|, |2|) = 2 = \text{norm}(\underline{x}, 'inf')$$

SISTEMI LINEARI

$A \underline{x} = \underline{b}$ viene risolto in Matlab col comando backslash: \

$$\underline{x} = A \backslash \underline{b}$$

Ritorniamo al problema della approssimazione polinomiale generalizzando quanto visto per $P_1(x) = a_0 + a_1 x$.
Con lo stesso procedimento, i coefficienti di

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$$

sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^m & \sum x_i^{m-1} & \dots & \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum 1 \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m-1} & \sum x_i^{m-2} & \dots & \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum 1 \\ \sum x_i^{m-1} & \sum x_i^{m-2} & \sum x_i^{m-3} & \dots & \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum 1 & \dots & \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum 1 \\ \sum x_i & \sum 1 & \dots & \dots & \sum x_i & \sum 1 & \dots \\ \sum 1 & \dots & \dots & \dots & \sum 1 & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \vdots \\ \sum y_i x_i^m \end{pmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m+1)}$, simmetrica

È detto SISTEMA DELLE EQUAZIONI NORMALI. È pressoché
riscrivere il sistema in modo diverso:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m^1 & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{pmatrix}, \quad \underline{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

il sistema delle equazioni normali può essere scritto come

$$(A^T A) \underline{a} = A^T \underline{y}$$

PROP. La $A^T A$ ha TUTTI gli autovalori positivi (ossia, è
una matrice DEFINITA POSITIVA).

COROLLARIO Il sistema delle equazioni normali: $A^T A \underline{a} = A^T \underline{y}$ ha un'unica soluzione. In altri termini, il polinomio ai minimi quadrati è UNICO.

PROVA: Se $A^T A$ è def. positiva, NON ha l'autovettore nullo e quindi è NON singolare perché $|A| = \lambda_1 \dots \lambda_{n+1} \neq 0$.

OSS. In Matlab il polinomio di interpolazione
viene calcolato usando la funzione approssimazione

$$\underline{a} = \text{polyfit}(x_i, y_i, m)$$

se $m = m$: interpolazione

se $m < m$: approssimazione ai minimi quadrati

I coefficienti: $\underline{a} = [a_m \ a_{m-1} \dots \ a_1 \ a_0]$

Valere anche polyval().

RICERCA DI MODELLI NON LINEARI

Frequentemente si hanno delle misure

$$(x_i, y_i), \quad i = 0, \dots, m$$

e si conosce la legge che li genera con la presenza di uno o più parametri. Ad esempio, sappiamo che

$$y = K \cdot a^x$$

con K e a non noti e da determinarsi. Dalle misure voglio trovare dei valori ragionevoli di K ed a . Per farlo uso la tecnica dei minimi quadrati. Uso un trucco per ricondurre ai polinomi:

$$\ln(y) = \ln(K \cdot a^x) = \ln(K) + \ln(a) \cdot x$$

che è un legame lineare nelle variabili x e $\ln(y)$. Trovo $a_0 = \ln(K)$

e $a_1 = \ln(a)$ applicando la retta di regressione alle misure $(x_i, \ln(y_i))$, $i = 0, \dots, m$

Risolvendo tutto a_0 e a_1 e quindi

$$a_0 = \ln(K) \Rightarrow K = e^{a_0}$$

$$a_1 = \ln(a) \Rightarrow a = e^{a_1}$$

Analogamente si possono trattare i seguenti casi:

$$(•) \quad y = K \cdot x^a \Rightarrow \overset{\text{"Y"}}{\ln(y)} = \overset{a_0}{\ln(K)} + \overset{a_1}{a} \overset{\text{"X"}}{\ln(x)}$$

e applico la regressione alle coppie

$$\left(\overset{\text{X}_i}{\ln(x_i)}, \overset{\text{Y}_i}{\ln(y_i)} \right)$$

$$(•) \quad y = \frac{kx}{x+a} \Rightarrow \overset{\text{"Y"}}{\frac{1}{y}} = \frac{x+a}{kx} = \frac{1}{k} + \frac{a}{x} = \overset{a_0}{\frac{1}{k}} + \overset{a_1}{a} \overset{\text{"X"}}{\frac{1}{x}}$$

applicato alle coppie

$$\left(\frac{1}{x_i}, \frac{1}{y_i} \right), \quad i = 0, \dots, m$$

INTEGRAZIONE NUMERICA O QUADRATURA

Il problema è valutare un INTEGRALE DEFINITO del tipo

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

con f regolare e $a < b$.

L'idea è quella di SOSTITUIRE f con il polinomio di interpolazione nei nodi x_i , $i=0, \dots, n$ distinti tra loro e appartenenti ad $[a, b]$. In altre parole

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx = I_n$$

C'è l'errore, in generale,

$$E_n = I - I_n.$$

Ricerchiamo l'espressione di I_n :

$$I_n = \int_a^b p_n(x) dx \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \right) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b l_i(x) dx}_{= A_i^{(n)}}$$

$$= \sum_{i=0}^n \overset{\text{pesi}}{A_i^{(n)}} f(\overset{\text{modi}}{x_i})$$

FORMULA DI QUADRATURA

dove gli $A_i^{(n)}$ sono numeri fissi una volta che è deciso i modi perché i polinomi di Lagrange $l_i(x)$ dipendono solo dai modi e non da $f(x_i)$.

PROP. Vale la relazione

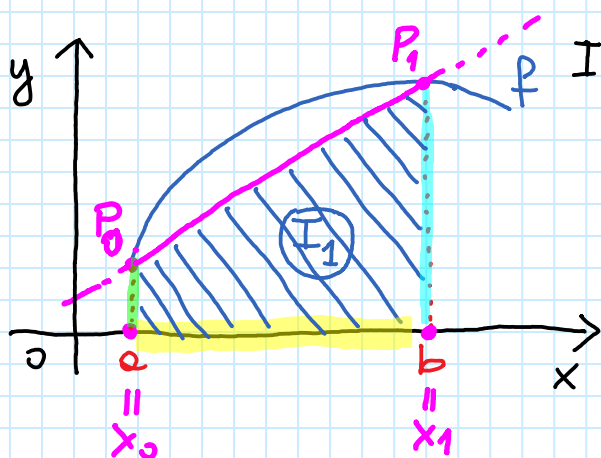
$$\sum_{i=0}^m A_i^{(m)} = b-a$$

DIM. $\hat{=}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m A_i^{(m)} &= \sum_{i=0}^m \int_a^b l_i(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^m l_i(x) \right) dx = \int_a^b 1 dx = \\ &= [x]_a^b = b-a. \end{aligned}$$

relazione polinomi
Lagrange

FORMULA DEI TRAPEZI



$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_1(x) dx =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(b-a)}{2} [f(a) + f(b)] = I_1 \\ &= \underbrace{\frac{(b-a)}{2}}_{A_0^{(1)}} f(a) + \underbrace{\frac{(b-a)}{2}}_{A_1^{(1)}} f(b) \end{aligned}$$

Le formule DEI TRAPEZI

$$I_T = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Re, in genere, un errore (ossia $\bar{e} = I \neq I_T$). Questo errore è nullo se $f(x)$ è lineare in $[a, b]$. Negli altri casi l'errore è esprimibile con la relazione

$$E = - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

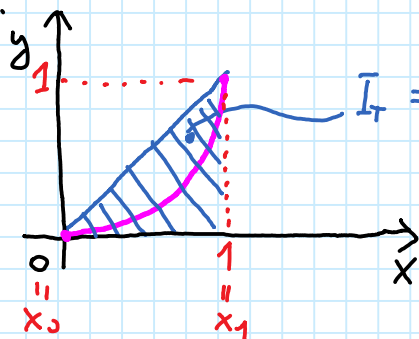
con ξ punto di (a, b) , di solito non determinabile.

ESEMPIO Calcoliamo, usando la formula dei trapezi,

(a) $\int_0^1 x^3 dx$

(b) $\int_{-1}^1 x^3 dx$

Vedo (a).



$$I_T = \frac{1-0}{2} (0^3 + 1^3) = \frac{1}{2}$$

Dato che

$$I = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

hò l'errore $E = I - I_T = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

DOMANDA: quanto vale ξ delle formule dell'errore? E'

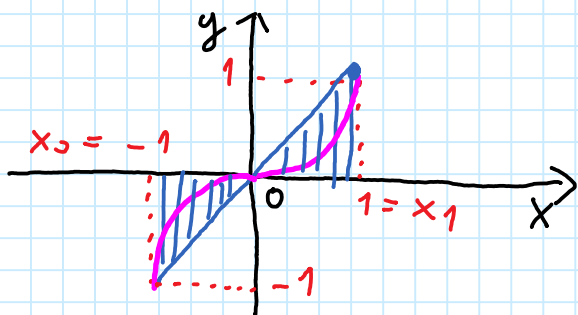
$$f(x) = x^3; \quad f'(x) = 3x^2; \quad f''(x) = 6x$$

per cui risulta

$$E = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{(1-0)^3}{12} \cdot 6\xi \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\xi}{2} \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{2}$$

Cosa succede in (b)?



$$I_T = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^1 x^3 dx = I$$

due
trapezi
uguali

f dispari