Diario del corso di Analisi Matematica 3

G. Orlandi

a.a. 2015-16

Vengono qui di seguito elencati gli argomenti trattati a lezione. Il diario servirà anche per definire il programma d'esame.

Bibliografia.

[1] Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill (1987).
[2] Matthews, Howell, *Complex analysis for mathematics and Engineering*, Jones & Bartlett (2006).
[3] Spiegel, *Laplace Transforms*, collana Schaum, Mc Graw-Hill (1994).
[4] Weinberger, *A first course in Partial Differential Equations*, Dover (1995).
[5] De Marco, *Analisi Matematica 2.*
[6] Ablowitz, Fokas, *Complex variables, introduction and applications*, Cambridge University Press (2003).

Lezione del 2/10/15 (2 ore). Introduzione al corso. Richiami sui numeri complessi: parte reale, parte immaginaria, somma, prodotto, coniugio, prodotto scalare, modulo, argomento, argomento principale, rappresentazione cartesiana $z \equiv a + ib$, $i^2 = -1$, matriciale $z \equiv aI + bJ$, $J^2 = -I$ mediante le trasformazioni lineari conformi del piano che preservano l'orientazione, rappresentazione polare $z = |z|e^{i\arg(z)}$. Radici e formula di De Moivre.

Lezione del 6/10/15 (2 ore) Funzioni complesse $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: si adottano le notazioni rettangolare $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $u, v : A \to \mathbb{R}$. In virtù della relazione $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, si pone anche $f(x + iy) = f(z, \bar{z}) = u(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z})$ (rappresentazione con le variabili coniugate). Limiti e continuità per funzioni complesse. Funzioni elementari: polinomi, funzioni razionali. Differenziabilità (in senso reale) per $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, matrice Jacobiana Df, invertibilità locale. Esempi: la funzione $f(z) = z^2$, la funzione $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$. Derivabilità in senso complesso, funzioni olomorfe. Relazione tra $f'(z)$ e la matrice Jacobiana $Df(z)$. Regole di derivazione (somma, prodotto, quoziente, composizione, inversa), derivabilità delle funzioni elementari. Anello delle funzioni olomorfe.

Proposizione: se $f = u + iv$ è olomorfa su un aperto A allora le derivate parziali di u e v verificano le equazioni di Cauchy-Riemann su A. Rispetto alle variabili coniugate $z, \bar{z}$ le equazioni di C-R si riducono a $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, ossia una funzione olomorfa si deve poter esprimere esplicitamente in funzione della sola z.

In particolare, la funzione $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ è derivabile in senso complesso solamente per $z = 0$.

Interpretazione geometrica delle equazioni di Cauchy-Riemann: se $f = u + iv$ allora C-R implica $|\nabla u| = |\nabla v|$ e $\nabla v \perp \nabla u$ (ossia gli insiemi di livello di u sono ortogonali a quelli di v, ovvero le linee di flusso di u corrispondono agli insiemi di livello di v e viceversa), e la matrice jacobiana $Df = \frac{\partial u}{\partial x} I + \frac{\partial v}{\partial x} J$ è una trasformazione conforme (nella rappresentazione matriciale dei numeri complessi, si ha $Df \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'$, per cui detto $\theta = \arg f'$, Df risulta essere la composizione di una rotazione antioraria di angolo θ e di una dilatazione di ampiezza $|f'|$), che preserva l'orientazione su $\mathbb{R}^2$ (ossia $\det Df = |f'| \geq 0$). Inoltre, se $f' \neq 0$ il rango di Df è 2 (e in tal caso f è localmente invertibile per il teorema della funzione inversa), mentre se $f' = 0$ il rango di Df è nullo.

Una classe importante di funzioni olomorfe è data dalle funzioni analitiche complesse (o di classe C^ω), ovvero funzioni che si rappresentano localmente come serie di potenze complesse del tipo $f(z) = \sum_k c_k (z - z_0)^k$, con $c_k \in \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Detto $R > 0$ il raggio di convergenza della serie, si ha che $f(z)$ converge puntualmente per $|z - z_0| < R$ e totalmente (ergo uniformemente) su $|z - z_0| \leq R - \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$ fissato. Per le serie di potenze complesse vale analogamente al caso reale il teorema di derivazione per serie, per cui si deduce che rappresentano funzioni di classe C^∞ e convergono alla propria serie di Taylor (ovvero sono di classe analitica o C^ω) nel cerchio di convergenza $\{|z - z_0| < R\}$.

In particolare le funzioni analitiche complesse sono olomorfe nel loro dominio di definizione. Enunciato del teorema fondamentale dell'analisi complessa: le funzioni olomorfe sono analitiche.

Lezione del 9/10/15 (2 ore). Funzioni elementari. Esponenziale complesso $e^z = \sum_k \frac{1}{k!} z^k$. Per il criterio di convergenza totale si ha che e^z è una funzione ben definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ ed inoltre vale $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$, e valgono le equazioni di Cauchy-Riemann per $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$. Si ha inoltre $e^{z+2k\pi i} = e^z$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Funzioni trigonometriche complesse $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Funzioni iperboliche complesse.

Il logaritmo complesso $\log z = \log |z| + i \arg(z)$. Logaritmo principale. La funzione potenza complessa $z^c = e^{c \log z}$. Superfici di Riemann a più fogli, superficie di Riemann del logaritmo (infiniti fogli).

Funzioni olomorfe e funzioni armoniche: se $f = u + iv$ è olomorfa allora u e v sono funzioni armoniche, ossia vale $\mathrm{tr} D^2 u \equiv \Delta u = \Delta v = 0$, dove $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$ è l'operatore di Laplace o Laplaciano in due dimensioni. In particolare v è detta l'armonica coniugata di u.

Determinazione dell'armonica coniugata di una funzione armonica data.

Equazione di Laplace: si tratta di un'equazione alle derivate parziali (EDP) del secondo ordine di tipo ellittico (quella delle onde è di tipo iperbolico, quella del calore è di tipo parabolico) che interviene nella descrizione di fenomeni in situazioni di equilibrio: distribuzioni stazionarie di temperatura, concentrazioni di sostanze chimiche, potenziale elettrostatico (rispettivamente gravitazionale) in una regione in cui non vi sono cariche (risp. masse), descrizione euleriana del campo di velocità di un fluido incompressibile irrotazionale. Vi è anche un'interpretazione probabilistica legata ad alcuni importanti processi stocastici (ad es. il moto browniano).

Soluzione fondamentale del Laplaciano in due dimensioni: è la funzione $\log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ (parte reale della funzione $\log z$) definita su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Rappresenta il potenziale generato da una carica puntiforme posta nell'origine (o meglio, il potenziale elettrostatico generato da un filo rettilineo uniformemente carico in $\mathbb{R}^3$), ed è un ingrediente essenziale nella costruzione di soluzioni dell'equazione di Laplace non omogenea $\Delta u = g$, dove $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione data.

Osservazione: le funzioni tali che $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ sono dette *antiolomorfe*, sono le coniugate di funzioni olomorfe, e soddisfano a proprietà analoghe a quelle delle funzioni olomorfe.

Lezione del 13/10/15 (2 ore). Integrali di cammino per funzioni complesse. Data $f : A \subset \mathbb{C} \to C$ continua e $\Gamma \subset A$ una curva semplice orientata di classe C^1 a tratti (o più in generale, una curva continua *rettificabile*, ovvero di lunghezza finita) parametrizzata da $\gamma : [a,b] \to A \subset \mathbb{C}$, si definisce

$$\int_\Gamma f(z)dz := \lim_{|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=0}^{N} f(z_k)\cdot \Delta z_k\,,$$

dove $\cdot$ è il prodotto complesso, $z_0,...,z_N$ individuano una partizione di Γ e $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Nelle ipotesi di cui sopra il limite delle somme di Cauchy-Riemann esiste e quindi l'integrale è ben definito. Vale inoltre $\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)dt$. Se $f = u+iv$ e $z = x+iy$ si ha $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma udx - vdy\, + i\int_\Gamma udy + vdx$. Definiamo il campo di vettori $\vec{E} = (u,-v)$. Detto τ il versore tangente a Γ e ν il versore normale (rotazione oraria di τ), si ha $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma <\vec{E},\tau> d\ell\, - i\int_\Gamma <\vec{E},\nu> d\ell$.

Proprietà degli integrali di cammino: indipendenza dalla parametrizzazione (a meno dell'orientazione), linearità rispetto ad f, additività rispetto alla curva. Teorema fondamentale del calcolo per integrali di cammino: se $f = g'$ con g olomorfa, allora $\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma g'(z)dz = \int_\Gamma dg = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$. In particolare vale la proprietà di circuitazione nulla $\oint_\Gamma g'(z)dz = 0$ per ogni curva Γ chiusa.

Equivalentemente, se $f = g'$ allora la forma differenziale a coefficienti complessi $f(z)dz$ è esatta, coincidendo con il differenziale dg di g. In maniera analoga, se $f = u+iv$ e $g = \phi + i\psi$, il campo di vettori $\vec{E} = (u,-v)$ è conservativo e vale $\vec{E} = \nabla\phi$.

In particolare, se Γ ha estremi z_1 e z_2, si ha $\int_\Gamma z^k dz = \frac{1}{k+1}(z_2^{k+1} - z_1^{k+1})$ per ogni $k \neq -1$.

Osservazione: nel caso in cui $f(z) = z^{-1}$ il risultato precedente non si può applicare in maniera immediata, dato che $z^{-1} = (\log z)'$ ma il logaritmo non è una funzione univoca. Infatti, detta Γ la curva semplice chiusa data dalla circonferenza di centro l'origine e raggio $R > 0$ orientata nel verso antiorario, si mostra che $\oint_\Gamma z^{-1}dz = 2\pi i$.

Per gli integrali di cammino vale la maggiorazione

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leq \int_\Gamma |f(z)|\,|dz| \leq \sup_A |f| \int_a^b |\dot\gamma(t)|dt = ||f||_{L^\infty(A)}|\Gamma|,$$

dove $|\Gamma|$ indica la lunghezza della curva $\Gamma \subset A$.

Osservazione: per una curva di classe C^0 (ossia solo continua) si può definire la lunghezza come estremo superiore delle lunghezze delle poligonali associate ad partizioni finite della curva. Le curve continue di lunghezza finita sono dette *rettificabili.* La definizione di integrale di cammino di una funzione continua è possibile anche nel caso di curve rettificabili, e la maggiorazione precedente continua a sussistere anche in questo caso.

Lezione del 16/10/15 (2 ore). Richiami sulle forme differenziali in $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$: una 1-forma $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ a valori complessi (ossia $a(x,y), b(x,y) \in \mathbb{C}$ si dice *esatta* se $\omega = du$, per una qualche funzione $u(x,y)$, dove $du = u_x dx + u_y dy$ ne indica il differenziale. Si introduce un prodotto anticommutativo $\wedge$ sulle 1-forme (associativo, lineare, distributivo rispetto alla somma) ed un operatore d (differenziale esterno) definito da $d\omega = da \wedge dx + db \wedge dy = (-a_y + b_x)dx \wedge dy$. Se $d\omega = 0$ (ossia $a_y = b_x$) la forma si dice *chiusa.* Ogni forma esatta è chiusa, il viceversa è sicuramente vero su domini semplicemente connessi. Forme esatte sono associate a campi vettoriali conservativi, forme chiuse a campi irrotazionali. In generale, le forme differenziali sono oggetti naturali rispetto all'integrazione orientata (su curve, superfici,...). Teorema di Stokes (Gauss-Green) per forme differenziali di classe C^1: $\oint_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$, dove le orientazioni di ∂D e D sono legate tra loro dalla regola della mano destra.

Proposizione: f olomorfa $\Rightarrow$ la forma differenziale complessa $f(z)dz = (u+iv)(dx+idy)$ è chiusa. Infatti, se f è olomorfa, che $f(z)dz = udx - vdy + i(udy + vdx)$ sia chiusa segue dalle equazioni di Cauchy-Riemann. Nelle variabili coniugate $z, \bar z$ si ha in particolare $d(f(z)dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar z} d\bar z \wedge dz = 0$.

Le curve semplici, chiuse sono dette curve di Jordan. Teorema delle curve di Jordan: detta $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan continua, esistono $A, B \subset \mathbb{R}^2$ aperti, tali che $\Gamma = \partial A = \partial B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \cup \Gamma = \mathbb{R}^2$. Tali aperti sono detti l'esterno (quello dei due non limitato) e l'interno di Γ.

Teorema di Cauchy-Goursat: $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa $\Rightarrow$ per ogni curva di Jordan $\Gamma = \partial D$ di classe C^1 a tratti (o più in generale, rettificabile), con $D \subset A$, si ha $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$.

Dimostrazione nel caso f di classe C^1: per le formule di Gauss-Green nel piano si ha

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = \oint_{\partial D} udx - vdy + i\oint_{\partial D} udy + vdx = \int_D (-u_y - v_x) + i(u_x - v_y)\,dxdy = 0$$

in virtù delle equazioni di Cauchy-Riemann. Equivalentemente, $\oint_{\partial D} f(z)dz = \int_D d(f(z)dz) = 0$ essendo $f(z)dz$ chiusa.

Lezione del 20/10/15 (2 ore)

Lemma di Goursat in un triangolo interno al dominio di una funzione olomorfa, estensione al caso di una poligonale semplice chiusa ed infine al caso di curve di Jordan C^1 a tratti. Il teorema vale anche per curve di Jordan $\Gamma = \partial D$ di classe C^0 di lunghezza finita (ovvero rettificabili) e anche per f continua su $\Gamma = \partial D$ e olomorfa in D.

Una immediata conseguenza del teorema di Cauchy-Goursat: date due curve di Jordan Γ_1 e Γ_2 orientate per convenzione in senso antiorario, tali che Γ_1 sia interna a Γ_2, se f è olomorfa nella regione D compresa tra le due curve (ossia $\partial D = \Gamma_2 - \Gamma_1$) allora si ha $\oint_{\Gamma_2} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz$. Nel caso $f \in C^1$ lo si poteva immediatamente dedurre dalla formula di Stokes-Green: $\oint_{\Gamma_2} f(z)dz - \oint_{\Gamma_1} f(z)dz = \oint_{\partial D} f(z)dz = \int_D d(f(z)dz) = 0$ dato che $f(z)dz$ è chiusa.

Più in generale, se D è una regione compresa tra una curva esterna Γ_{ext} di Jordan e n curve di Jordan disgiunte Γ_i, $i = 1, ..., n$ interne a Γ_{ext}, tutte orientate in senso antiorario, si ha, per f olomorfa in D, $\oint_{\Gamma_{ext}} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} f(z)dz$.

Formula integrale di Cauchy e conseguenze: analiticità delle funzioni olomorfe, le derivate delle funzioni olomorfe sono olomorfe, le funzioni olomorfe sono determinate dai valori al contorno del dominio di definizione.

Lezione del 23/10/15 (2 ore). Conseguenze della formula integrale di Cauchy: il limite uniforme di funzioni olomorfe è necessariamente una funzione olomorfa. Formula integrale e stime di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa in $D \subset \mathbb{C}$: si ha $|f^{(k)}(z)| \leq \|f\|_{B_R(z)} \frac{k!}{R^k}$ per ogni $R <$dist$(z, \partial D)$. Teorema di Liouville: una funzione intera (ossia olomorfa su tutto $\mathbb{C}$) e limitata è costante. Teorema fondamentale dell'algebra.

Proprietà della media per funzioni olomorfe: $f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta$, per $r <$dist$(z, \partial D)$. Analogamente, $f(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R(z)} f(x + iy)\, dxdxy$, per $R <$dist$(z, \partial D)$. In particolare, se $f = u + iv$ vale la proprietà della media per u e v. Si deduce la proprietà della media per funzioni armoniche: infatti se u è armonica, la sua restrizione ad una palla (o a un dominio semplicemente connesso) ammette una armonica coniugata v, per cui la funzione $f = u + iv$ è olomorfa, e la proprietà della media vale dunque per u (e per v).

Lezione del 30/10/15 (2 ore). Esercizi su formula integrale di Cauchy, stime di Cauchy e teorema di Liouville. Principio del massimo modulo: se $|f(z)| = \sup_B f$ con z interno a B aperto connesso, allora f è costante su B: nel caso $f \in C^0(\bar{B})$ ed f olomorfa in B, si ha $\sup_B |f| = \sup_{\partial B} |f|$. Se $f(z) \neq 0$ su B allora vale anche il principio del minimo modulo (si applica il teorema precedente alla funzione $g(z) = 1/f(z)$). Proprietà della media, principio del massimo e principio del minimo valgono anche per le funzioni armoniche, dato che per ogni u armonica in B si ha $u =$Re(f) per una opportuna f olomorfa in B. Teorema di Morera: se $f \in C^0(B)$ e $\oint_{\partial T} f(z)dz = 0$

per ogni triangolo $T \subset B$ si ha che localmente, ossia per ogni $z \in B_\epsilon(z_0) \subset B$, si ha $f(z) = F'(z)$, dove $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(z)dz$, ovvero f è la derivata di una funzione olomorfa e quindi è olomorfa. Il Teorema di Morera enuncia l'inverso del Teorema di Cauchy-Goursat. Esercizi sul principio del massimo modulo.

Lezione del 3/11/15 (2 ore). Teorema degli zeri delle funzioni olomorfe. Ordine di uno zero. Principio di continuazione analitica ed applicazioni: estensione di una funzione olomorfa al suo dominio massimale "naturale", superfici di Riemann. Comportamento di una funzione olomorfa attorno a singolarità isolate: si ha la classificazione in singolarità eliminabili (nel caso la funzione rimanga limitata intorno alla singolarità), singolarità essenziali (funzione non limitata che non ammette limite, immagine di ogni intorno della singolarità densa in $\mathbb{C}$), poli (funzione non limitata, tendente in modulo all'infinito). Ordine di un polo. Esempi di funzioni con singolarità eliminabili, poli, singolarità essenziali. Funzioni razionali, funzioni meromorfe. Criteri per la determinazione della natura di una singolarità isolata di una funzione data: esistenza del limite finito, infinito, non esistenza del limite.

Lezione del 6/11/15 (2 ore). Sviluppi in serie di Laurent, esempi, teorema di esistenza e unicità dello sviluppo in una corona fissata. Caratterizzazione della natura di una singolarità isolata in funzione dello sviluppo di Laurent intorno ad essa: se tutti i termini di indice negativo dello sviluppo sono nulli la singolarità è eliminabile, se infiniti termini di indice negativo sono non nulli la singolarità è essenziale, nel caso rimanente (numero finito di termini con indice negativo non nulli) la singolarità è un polo. Esempi di calcolo di sviluppi di Laurent.

Lezione del 10/11/15 (2 ore). Calcolo di circuitazioni per funzioni con singolarità isolate interne al circuito. Definizione di residuo. Teorema dei residui. Calcolo dei residui nel caso di singolarità essenziali. Alcuni metodi di calcolo dei residui per singolarità di tipo polo e per funzioni meromorfe.

Lezione del 13/11/15 (2 ore). Residuo della derivata logaritmica $\frac{f'(z)}{f(z)}$ di una funzione olomorfa $f(z)$ in un suo zero di ordine m. Residuo di $\pi f(z)\cot(\pi z)$ in $z = n \in \mathbb{Z}$. Residuo all'infinito. Teorema globale dei residui.

(non visto a lezione) La sfera di Riemann $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Presentiamo la sfera di Riemann come esempio di superficie di Riemann (ovvero come varietà complessa, con carte locali e cambiamenti di carte (trasformazioni di coordinate) biolomorfi): sia data la superficie sferica $S^2 = \partial B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^3$, e siano $N = (0, 0, 1/2)$ e $S = (0, 0, -1/2)$ rispettivamente il polo nord e sud di S^2. Si considerino le proiezioni stereografiche $\phi_S : S^2 \setminus \{S\} \to \{(x, y, 1/2)\,,\ x + iy = z\} \simeq \mathbb{C}$ e $\phi_N : S^2 \setminus \{N\} \to \{(x', y', -1/2)\,,\ x' - iy' = w\} \simeq \mathbb{C}$. Si tratta di diffeomorfismi conformi (ovvero sono differenziabili con inversa differenziabile, ed inoltre il differenziale $d\phi_S$ (risp. $d\phi_N$) preserva gli angoli) che definiscono carte locali su S^2. Si dimostra che la trasformazione di coordinate $\phi_S^{-1} \circ \phi_N : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è data dalla mappa

$z = \phi_S^{-1} \circ \phi_N(w) = 1/w$, ed è dunque una funzione olomorfa, altrimenti detto S^2 è una superficie di Riemann compatta.

Considerando $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la compattificazione di $\mathbb{C}$ aggiungendo il punto all'infinito (dichiarando che gli intorni aperti di ∞ sono i complementari dei compatti (i.e. chiusi e limitati) di $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, come ad esempio gli insiemi $\{|z| > M\}$) si ha che le proiezioni stereografiche (e le trasformazioni di coordinate) si estendono in modo unico a diffeomorfismi $\phi_S, \phi_N : S^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ponendo rispettivamente $\phi_S(S) = \phi_N(N) = \infty$, ed analogamente si ha l'estensione naturale della trasformazione di coordinate $z = 1/w$ a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ponendo $\infty = 1/0$ e $0 = 1/\infty$.

Sussiste pertanto in modo naturale l'identificazione $S^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ della sfera di Riemann con la compattificazione all'infinito di $\mathbb{C}$.

Lezione del 17/11/15 (2 ore). Metodi di calcolo di integrali di funzioni razionali di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ su $[0, 2\pi]$ mediante la teoria dei residui.

Lemma del (l'arco di) cerchio grande: se esiste il $\lim_{|z|\to+\infty} z \cdot f(z) = c$ (nel caso ci sia uno sviluppo di Laurent all'infinito per f, tale limite corrisponde al coefficiente c_{-1} di tale sviluppo, ovvero all'opposto del residuo all'infinito di f), si ha $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R(z_0,\theta_1,\theta_2)} f(z)dz = ic(\theta_2 - \theta_1)$, dove $C_R(z_0, \theta_1, \theta_2)$ è l'arco di cerchio di centro z_0 e raggio R compreso tra le semirette $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$.

Integrali impropri su $\mathbb{R}$ nel senso del valor principale per funzioni non necessariamente integrabili secondo Lebesgue (caso delle funzioni limitate). Tali integrali coincidono con quello di Lebesgue nel caso di una funzione limitata ed integrabile. Calcolo di integrali su $\mathbb{R}$ mediante la teoria dei residui.

Lezione del 20/11/15 (2 ore). Nozione di integrale nel senso del valor principale per funzioni non necessariamente limitate né integrabili secondo Lebesgue. Lemma del cerchio piccolo per funzioni con poli semplici reali. Calcolo di integrali su $\mathbb{R}$ mediante la teoria dei residui: quando vi sono un numero finito di singolarità, con poli reali semplici, ed esiste il $\lim_{z\to\infty} z \cdot f(z) \equiv -\mathrm{Res}(f(z), z = \infty)$, si ha la formula generale (coerente con il teorema globale dei residui)

$$\begin{aligned}
\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i & \sum_{\mathrm{Im}(z_k)>0} \mathrm{Res}(f(z), z = z_k) \\
& + \pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_j)=0} \mathrm{Res}(f(z), z = z_j) \\
& + \pi i \,\mathrm{Res}(f(z), z = \infty) \\
& = -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_k)<0} \mathrm{Res}(f(z), z = z_k) \\
& - \pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_j)=0} \mathrm{Res}(f(z), z = z_j) \\
& - \pi i \,\mathrm{Res}(f(z), z = \infty)
\end{aligned}$$

Lemma di Jordan (enunciato e dimostrazione) ed applicazioni al calcolo di trasformate di Fourier di funzioni con poli reali semplici. Trasformata di Fourier della funzione seno cardinale $\frac{\sin x}{x}$ (classico esempio di filtro "passa basso" in teoria dei segnali) : si tratta della funzione "rettangolare" che vale π sull'intervallo $(1, 1)$, $\pi/2$ in ± 1 e 0 altrove in $\mathbb{R}$.

Lezione del 24/11/15 (2 ore). Integrali di funzioni con singolarità in punti di ramificazione. Integrali del tipo $\int_0^{+\infty} x^p f(x)\, dx$ con $0 < p < 1$ e $f(x)$ avente poli reali semplici. Integrali del tipo $\int_0^{+\infty} f(x) \log x\, dx$.

Lezione del 27/11/15 (2 ore). Funzioni con infinite singolarità isolate. Applicazioni del calcolo dei residui alla somma di serie numeriche del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n)$, con $|z \cdot f(z)| \to 0$ per $|z| \to +\infty$: si integra $f(z)\pi \cot(\pi z)$ sul bordo di un opportuno quadrato Q_N di lato $N \to +\infty$: l'integrale, che tende a zero, risulta uguale alla somma S dei residui nelle singolarità di f più la somma dei residui nei poli di $\pi \cot \pi z$, che vale $\sum f(n)$ (dove la somma si intende estesa agli $n \in \mathbb{Z}$ per cui $f(n)$ è finito). Nel caso $f(z) = z^{-2}$ (funzione pari) si deduce in particolare

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \text{Res}(\frac{\pi \cot \pi z}{z^2}, z = 0) = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \text{ovvero} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dimostriamo che effettivamente si ha $\oint_{\partial Q_N} f(z)\pi \cot(\pi z)\, dz \to 0$ per $N \to +\infty$ nel caso Q_N sia il quadrato di centro l'origine ed avente un vertice in $(N + \frac{1}{2})(1 + i)$: si ha infatti, per $z = x + iy \in \partial Q_N$, è ben definita l'espressione

$$\pi \cot(\pi z) = \pi i \frac{\exp(i\pi x) \exp(-\pi y) + \exp(-i\pi x) \exp(\pi y)}{\exp(i\pi x) \exp(-\pi y) + \exp(-i\pi x) \exp(\pi y)},$$

da cui si ricava che, per $|x| = N + \frac{1}{2}$ e $|y| < \frac{1}{2}$, $\pi |\cot(\pi z)| \leq \frac{\exp(\pi/2) - \exp(-\pi/2)}{\exp(\pi/2) + \exp(-\pi/2)} \leq 1$, mentre per $|y| > \frac{1}{2}$ si ha $\pi |\cot(\pi z)| \leq \frac{\exp(-\pi|y|) + \exp(\pi|y|)}{\exp(\pi|y|) - \exp(-\pi|y|)} \leq 2$, ovvero $\pi \cot(\pi z)$ è limitata su ∂Q_N. In particolare,

$$\left| \oint_{\partial Q_N} f(z) \cot(\pi z)\, dz \right| \leq 2(8N + 4) \sup_{\partial Q_N} |f| \leq 2(8N + 4)N^{-1}\epsilon \leq 17\epsilon$$

per N sufficientemente grande, essendo $N \cdot \sup_{\partial Q_N} |f(z)| \leq \sup_{\partial Q_N} |z \cdot f(z)| \to 0$ per $N \to +\infty$.

Esempi di calcolo di integrali notevoli in fisica e probabilità: integrali di Fresnel $\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx$, $\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$, trasformata di Fourier (alias funzione caratteristica) di una funzione gaussiana (alias distribuzione normale).

Cenni alla trasformata Zeta per l'analisi in frequenza di segnali discreti, e la risoluzione di equazioni alle differenze. Data una successione $\{a_n\}$ (ovvero un segnale discreto) se ne definisce la trasformata Zeta ponendo $\mathcal{Z}(\{a_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$. Si tratta di fatto della rappresentazione in serie di Laurent di una funzione olomorfa al di fuori di un cerchio (ovvero la serie converge per $|z| > R$ per un certo R).

NB: se invece consideriamo $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ otteniamo la cosiddetta funzione generatrice della successione, convergente in un disco di centro zero (ovvero per $|z| < R^{-1}$).

Queste funzioni (trasformata Zeta e funzione generatrice) si ricavano l'una dall'altra mediante l'inversione $z \mapsto z^{-1}$, e codificano tutte le informazioni relative alla successione $\{a_n\}$. Se questa è definita per ricorrenza (ovvero risolve un'equazione alle differenze), come ad esempio quella di Fibonacci $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, la relazione di ricorrenza permette di identificare la trasformata Zeta (o la funzione generatrice): si ha infatti, nella fattispecie della successione di Fibonacci, $z^2\mathcal{Z}(\{a_n\}) - z\mathcal{Z}(\{a_n\}) - \mathcal{Z}(\{a_n\}) = a_0 z^2 + (a_1 - a_0)z$, da cui $\mathcal{Z}(\{a_n\})(z) = (a_0 z^2 + (a_1 - a_0)z)(z^2 - z - 1)^{-1} = z^2(z^2 - z - 1)^{-1}$. Si osservi come intervenga nella definizione della funzione generatrice il reciproco del polinomio caratteristico della relazione di ricorrenza (o dell'equazione alle differenze che dir si voglia), altrimenti noto come *funzione di trasferimento* in teoria dei segnali.

Dalle definizioni si ricava immediatamente che $a_k = \mathrm{Res}(\frac{\mathcal{Z}(\{a_n\})(z)}{z^{-k-1}}, z = x_1) + \mathrm{Res}(\frac{\mathcal{Z}(\{a_n\})(z)}{z^{-k-1}}, z = x_2)$, con $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ le radici del polinomio caratteristico $z^2 - z - 1$. Si ottiene in particolare, nel caso della successione di Fibonacci, la nota formula

$$a_k = (x_1 - x_2)(x_1^{k+1} - x_2^{k+1}), \qquad k = 0, 1, 2, ...$$

Lezione del 1/12/15 (2 ore). Introduzione al principio dell'argomento. Circuitazione lungo curve chiuse. Indice di avvolgimento di una curva chiusa attorno ad un punto fuori di essa, significato geometrico collegato alla variazione dell'argomento lungo la curva chiusa. Proprietà dell'indice di avvolgimento: è una funzione (olomorfa) a valori interi, costante nelle componenti connesse del piano privato della curva, nullo nella componente connessa illimitata. Interpretazione del principio dell'argomento in termini dell'indice di avvolgimento. Formula integrale di Cauchy e teorema dei residui nel caso di curve chiuse (non necessariamente di Jordan).

Lezione del 4/12/15 (2 ore). Applicazioni del principio dell'argomento: teorema fondamentale dell'algebra, teorema di Rouché e determinazione del numero di radici di un polinomio in una data regione, teorema di Hurwitz. Biiettività di funzioni olomorfe definite su D, con $\partial D = \Gamma$ curva di Jordan, sotto ipotesi di iniettività della restrizione al bordo Γ del dominio, e principio di conservazione delle frontiere: una funzione olomorfa iniettiva trasforma la frontiera Γ del dominio D nella frontiera $f(\Gamma) = \partial f(D)$ dell'immagine ($f(\Gamma)$ è anch'essa una curva di Jordan), l'interno di Γ nell'interno (risp. nell'esterno) di $f(D)$ e l'esterno di Γ nell'esterno (risp. nell'interno) di $f(D)$.
Esercizi sulle applicazioni del principio dell'argomento.

Lezione del 11/12/15 (2 ore). Trasformazioni conformi nel piano. Relazione con le funzioni olomorfe. Proprietà: conservazione delle frontiere. Una funzione olomorfa iniettiva sul bordo di un dominio è iniettiva (e quindi conforme) anche all'interno del dominio. Invarianza conforme del problema di Dirichlet. Il Teorema di Riemann di classificazione conforme degli aperti semplicemente connessi di $\mathbb{C}$ (o della sfera di Riemann). Trasformazioni di Möbius, omomorfismo con $GL_2(\mathbb{C})$, estensione naturale a trasformazioni della sfera di Riemann di sè.

Teorema dell'applicazione aperta. Cenno di dimostrazione.

Dimostrazione: sia f olomorfa e non costante su un aperto connesso A, allora se $B \subset A$ è aperto e $z_0 \in B$, detto $w_0 = f(z_0)$ si ha, in un disco $B_r(z_0) \subset B$, la rappresentazione $f(z) = w_0 + (z - z_0)^k h(z)$ con $h(z_0) \neq 0$, per un certo $k \geq 1$. Dato che $|h(z_0)| \neq 0$, supponendo senza perdita di generalità che $\mathrm{Arg}\,(h(z_0)) \neq \pi$ (altrimenti basta considerare la funzione $-f(z)$), dove Arg indica l'argomento principale ($-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leq \pi$) risulta ben definita in un intorno $B_{r'}(z_0)$ di z_0 con $r' \leq r$ l'applicazione

$$g(z) = |h(z)|^{\frac{1}{k}} \exp\left[\frac{i\,\mathrm{Arg}\,(h(z))}{k}\right],$$

per cui in $B_{r'}(z_0)$ si può scrivere

$$f(z) = w_0 + [m(z)]^k, \qquad \text{con } m(z) = (z - z_0) \cdot g(z).$$

Inoltre l'applicazione $m(z)$ risulta invertibile (e quindi aperta) in un intorno $B_{r''}(z_0)$ con $r'' \leq r'$ per il teorema della funzione inversa, dato che $m'(z_0) = g(z_0) \neq 0$. Dato che anche l'applicazione $\zeta \mapsto \zeta^k$ è aperta, si ha che l'immagine di $B_{r''}(z_0)$, contenuta in $f(B)$, è un aperto contenente w_0, ovvero w_0 è punto interno di $f(B)$. □

Lezione del 18/12/15 (2 ore). Equazione di Laplace e problemi al contorno (Problema di Dirichlet, Problema di Neumann). Problemi ben posti: sono quelli per cui si ha esistenza, unicità e stabilità della soluzione rispetto ai dati del problema. Il problema di Dirichlet è ben posto. Equazione di Laplace in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di classe C^1, funzioni armoniche, subarmoniche, superarmoniche. Problemi al contorno: pb. di Dirichlet, pb. di Neumann. Soluzione classica in $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Motivazione: studio di fenomeni di equilibrio statico e dinamico. Alcuni esempi:

(elettrostatica) se u (a meno del segno) è il potenziale elettrostatico, ∇u è il campo elettrico ed il problema di Dirichlet $\Delta u = f$ in Ω, $u = g$ su $\partial\Omega$ corripsonde al problema fondamentale dell'elettrostatica: assegnata la distribuzione di cariche f in Ω ed il potenziale g sul bordo, determinare il campo elettrico all'interno di Ω. Nel problema di Neumann si assegna il flusso del campo elettrico attraverso $\partial\Omega$.

(fluidodinamica) equazione dei fluidi stazionari incomprimibili: dato un fluido di densità ρ trasportato a velocità V (indipendente dal tempo), dall'equazione di continuità $\rho_t + \mathrm{div}\,(\rho V) = 0$ si ricava, nel caso ρ costante, la condizione di divergenza nulla $\mathrm{div}\, V = 0$. Se il campo V è inoltre irrotazionale (non presenta vorticità), allora si ottiene $\Delta V =$[grad div - rot rot]$V = 0$, oppure, considerato che localmente si ha $V = \nabla\Phi$, si ottiene $\Delta\Phi =$div grad $\Phi = 0$.

(fenomeni di diffusione) distribuzioni stazionarie di temperatura, concentrazioni di sostanze chimiche in equilibrio in un dato ambiente sono soluzioni dell'equazione del calore (in regime stazionario) $\rho_t - k\Delta\rho = 0$, la quale corrisponde alla versione differenziale della legge di bilancio per la densità di massa ρ (rispettivamente per la temperatura/energia)

$$-\frac{d}{dt}\int_U \rho = \int_{\partial U} \Phi_\rho \cdot n = \int_U \operatorname{div} \Phi_\rho \,,$$

dove per il flusso di massa (rispettivamente il flusso di calore) Φ_ρ uscente dal dominio U si considera la legge di Fourier $\Phi_\rho = -k\nabla\rho$, ovvero si postula che la diffusione della sostanza (risp. del calore) nell'unità di tempo avvenga essenzialmente nella direzione di massima differenza di densità (risp. di temperatura).

La condizione al contorno di Dirichlet consiste nel fissare la densità di massa (risp. la temperatura) al bordo del dominio, mentre la condizione di Neumann consiste nel fissare il flusso di massa (risp. di calore) attraverso il bordo, in particolare la condizione di Neumann omogenea equivale a considerare il dominio isolato, stagno (risp. isolare termicamente).

Trattandosi di fenomeni di evoluzione, oltre alle condizioni al contorno è naturale considerare il problema ai valori iniziali, fissando un dato iniziale ρ_0 sul dominio.

Interpretazione probabilistica dei problemi al contorno ed ai dati iniziali per l'equazione del calore e l'equazione di Laplace, rappresentazione della soluzione come limite di passeggiate casuali, relazione con processi di diffusione e moto browniano. Operatore di Laplace discreto (differenze finite) come operatore di media.

Il problema di Dirichlet nel cerchio: risoluzione mediante uno sviluppo in serie di potenze complesse. La serie risultante converge nell'interno del cerchio unitario ad una soluzione dell'equazione di Laplace sotto condizioni miti sul dato al bordo g (ad esempio, basta $\|g\|_{L^1([-\pi,\pi])} < +\infty$), che risulta di classe C^∞ (anzi, analitica): è il cosiddetto effetto regolarizzante dell'operatore di Laplace, con stime sulle derivate analoghe alle stime di Cauchy per una funzione olomorfa. La soluzione all'interno del cerchio converge uniformemente al dato al bordo quando quest'ultimo è ad esempio una funzione continua con derivata a quadrato sommabile, altrimenti la convergenza è assicurata solo nei punti di continuità di g, e ad esempio nei punti di salto si ha che la soluzione ha punti limite compresi nell'intervallo $[\liminf g, \limsup g]$.

Osservazione: mediante uno sviluppo in serie di Laurent si ottiene in maniera del tutto analoga la soluzione del problema di Dirichlet nel dominio esterno al cerchio, con la condizione all'infinito $\exists \lim_{|z|\to+\infty} u(z) = c$.

Rappresentazione integrale della soluzione u del Pb. di Dirichlet nel cerchio (di raggio $a > 0$) $\{re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r < a\}$ con dato al bordo $g(ae^{i\phi}) \equiv g(\phi)$, $0 \le \phi \le 2\pi$, via nucleo di Poisson per il cerchio: per $r < a$ e $0 \le \theta \le 2\pi$,

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} g(\phi)\, d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_a(r, \theta, \phi) g(\phi)\, d\phi\,.$$

Alcune proprietà del nucleo di Poisson $P_a(r,\theta,\phi)$: si tratta di una funzione simmetrica rispetto a θ e ϕ, armonica rispetto alle coordinate (r,θ) (ovvero (r,ϕ)), che tende uniformemente a zero per $r \to a$ se $|\theta - \phi| > \delta$, mentre $P_a(r,\phi,\phi) \to +\infty$ per $r \to a$. Inoltre, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_a(r,\theta,\phi)\, d\phi = 1$ per ogni $r < a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, ovvero $\frac{1}{2\pi}P_a(r,\theta,\cdot)$ è una distribuzione di probabilità, precisamente quella relativa a dove avviene l'uscita dal cerchio di una traiettoria casuale che parte da $re^{i\theta}$. In particolare, la soluzione $u(r,\theta)$ corrisponde ad una media pesata dei valori al contorno.

Sia $\mu_{r,\theta}$ la misura di probabilità associata al nucleo di Poisson $P_a(r,\theta,\cdot)$, ovvero $\mu_{r,\theta}(E) = \frac{1}{2\pi}\int_E P_a(r,\theta,\phi)\, d\phi$ per $E \subset [0,2\pi]$ misurabile secondo Lebesgue. Per $r \to a$, $\theta \to \theta_0$ si ha $\mu_{r,\theta}(E) \to 1$ se $\theta_0 \in E$, mentre $\mu_{r,\theta}(E) \to 0$ altrimenti.

Delta di Dirac in $\mathbb{R}^n$: per $p \in \mathbb{R}^n$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ si pone $\delta_p(E) = 1$ se $p \in E$, $\delta_p(E) = 0$ altrimenti. La funzione d'insieme δ_p è monotona e σ-additiva, ovvero è una misura, in particolare una misura di probabilità dato che ha "massa totale" $\delta_p(\mathbb{R}^n) = 1$.

Per quanto visto sopra, la misura $\mu_{r,\theta}$ associata al nucleo di Poisson tende alla misura δ_{θ_0} per $r \to a$, $\theta \to \theta_0$.

Da queste proprietà (overo che la soluzione è una opportuna media pesata del dato al bordo) si ricava ad esempio che se $ae^{i\phi_0}$ è un punto di continuità di g, e $re^{i\theta} \to ae^{i\phi_0}$, allora $u(re^{i\theta}) \to g(\theta_0)$, ovvero la convergenza di u al dato al bordo nei punti di continuità di quest'ultimo (vedasi [4], p. 106).

Osservazione: $u(0)$ risulta essere la media integrale dei valori al contorno: è la proprietà della media delle funzioni armoniche, da cui si può ricavare il principio del massimo.

Insiemi di livello ed interpretazione fisica del nucleo di Poisson: fissato ϕ, $P_a(r,\theta,\phi)$ corrisponde al potenziale elettrostatico nel punto $re^{i\theta}$ originato da un dipolo posto nel punto $ae^{i\phi}$ sul bordo del cerchio.

La rappresentazione integrale della soluzione fornisce inoltre una naturale nozione di soluzione generalizzata, valida per dati al bordo non regolari, ad esempio in L^1.

Lezione del 22/12/15 (2 ore). Identità di Green e metodi di energia per l'unicità del pb. di Dirichlet e del pb. di Neumann. Per ogni $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato con bordo di classe C^1 a tratti si ha

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\,, \tag{1}$$

$$-\int_\Omega u\Delta u = \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\,. \tag{2}$$

Da (2) si ricava che, posto $u = u_1 - u_2$ la differenza di due soluzioni del medesimo problema di Dirichlet (risp. Neumann), ed essendo $\Delta u = 0$ in Ω e $u = 0$ su $\partial\Omega$ (risp. $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su $\partial\Omega$), l'integrale $\int_\Omega |\nabla u|^2$ è nullo, da cui $\nabla u = 0$ in Ω ed u =cost. sulle componenti connesse di Ω, in particolare $u = 0$ nel caso del problema di Dirichlet, mentre per il problema di Neumann l'unicità si ha a meno di una costante.

Il principio del massimo per funzioni subarmoniche (risp. il principio del minimo per funzioni superarmoniche) di classe C^2 in domini limitati e conseguenze: unicità e stabilità (dipendenza continua) della soluzione del pb. di Dirichlet rispetto ai dati: per ogni $u \in C^2(\Omega)$ si ha ad esempio la stima (non ottimale!)

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + C(\Omega)\|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)}\,,$$

dove $C(\Omega) > 0$ è una costante proporzionale al diametro del dominio limitato Ω). Nel caso di domini bidimensionali, il principio del massimo per funzioni armoniche è conseguenza della proprietà della media per funzioni armoniche, a sua volta conseguenza della proprietà della media per funzioni olomorfe. La proprietà della media si verifica anche per funzioni armoniche in domini $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Osservazione: il principo del massimo vale anche per (sotto-)soluzioni dell'equazione del calore, ovvero $u_t - \Delta u \leq 0$. Ne consegue che il corrispondente problema ai valori iniziali / al contorno è ben posto (unicità e stabilità). L'unicità si può ottenere anche attraverso metodi di energia, osservando ad esempio che l'energia di Dirichlet $e(t)$(ovvero $e(t) = E(u(t,\cdot)) = \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,dx$) o il quadrato $f(t)$ della norma L^2 della soluzione (ovvero $f(t) = F(u(t,\cdot)) = \int_\Omega |u(t,x)|^2\,dx$) sono funzioni di Lyapunov per il sistema dinamico corrispondente, assumendo condizioni al contorno omogenee (si tratta del flusso gradiente di $E(u(t,\cdot))$ rispetto alla metrica L^2 su Ω). Ad esempio, se $u(t,x) = 0$ (risp. $\frac{\partial u(t,x)}{\partial n} = 0$) su $\partial\Omega$ per ogni $t > 0$, si ha

$$\dot{f}(t) = 2\int_\Omega u\cdot u_t = 2\int_\Omega u\Delta u = -2\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 0$$

$$\dot{e}(t) = 2\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(u_t) = -2\int_\Omega u_t\Delta u = -2\int_\Omega |\Delta u|^2 \leq 0$$

da cui, nel caso $u = u_1 - u_2$ essendo $e(0) = E(0) = 0$ (risp. $f(0) = F(0) = 0$), si ricava $e(t) \leq 0$ (risp. $f(t) \leq 0$) da cui $e(t) \equiv 0$ (risp. $f(t) \equiv 0$) per ogni t, per la positività di $e(t)$ (risp. di $f(t)$), ovvero $u(t,x) \equiv 0$ (risp. $\nabla u(t,x) \equiv 0$) per ogni $t > 0$, per ogni $x \in \Omega$.

Risoluzione del problema di Dirichlet mediante funzioni di Green. Dato un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera di classe C^1 a tratti, la soluzione del problema di Dirichlet $\Delta u = f$ in Ω relativo ad un dato al bordo $u = g$ su $\partial\Omega$, con $f \in C^0(\Omega)$, $g \in C^0(\partial\Omega)$, si rappresenta come

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} g(y)\nabla_y G(x,y)\cdot\nu\,d\sigma(y)\; + \int_\Omega f(y)G(x,y)\,dy\,,$$

dove $d\sigma$ è l'elemento di superficie, ν è la normale esterna a $\partial\Omega$, e la funzione $G(x,y)$, definita per $x,y \in \Omega$, $x \neq y$, è detta funzione di Green per il pb. di Dirichlet relativa ad Ω.

Proprietà salienti della funzione di Green: per $x \in \Omega$ si ha $-\Delta_y G(x,y) = \delta_x$, $G(x,y) = 0$ per $y \in \partial\Omega$, dove δ_x è la Delta di Dirac concentrata in $x \in \Omega$. In $\mathbb{R}^3$

$G(x, y)$ corrisponde al potenziale elettrico generato da una carica unitaria puntiforme concentrata in $x \in \Omega$, con il bordo $\partial\Omega$ costituito da un materiale conduttore messo a “terra” (ovvero a potenziale nullo).

In particolare, si può scrivere $G(x, y) = \Gamma(x-y)+w(x, y)$ dove $\Gamma(z)$, per $0 \neq z \in \mathbb{R}^n$, è la *soluzione fondamentale del Laplaciano* in $\mathbb{R}^n$, ovvero vale $-\Delta\Gamma = \delta_0$. Per $n = 3$, Γ corrisponde al potenziale elettrico (risp. gravitazionale) generato da una carica (risp. massa) unitaria puntiforme posta nell'origine. Per $n = 2$ si ha $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi} \log |z|$, mentre per $n > 2$ si ha $\Gamma(z) = c_n^{-1}|z|^{2-n}$, con $\frac{c_n}{n-1} = |\partial B(0, 1)|$ l'area $(n-1)$-dimensionale della superficie sferica $\{|z| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$).

La funzione $w(x, y)$ risolve il pb. di Dirichlet $\Delta_y w(x, y) = 0$ in Ω, $w(x, y) = -\Gamma(x - y)$ per $y \in \partial\Omega$.

Pertanto si ha $G(x, y) \to \infty$ per $y \to x$, con profilo asintotico uguale alla soluzione fondamentale traslata in x, inoltre $G(x, \cdot)$ è armonica in $\Omega \setminus \{x\}$ (in particolare è di classe C^∞) e si ha infine la proprietà di simmetria $G(x, y) = G(y, x)$.

La formula di rappresentazione per la soluzione u del problema di Dirichlet si ottiene a partire dall'identità di Green

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}$$

ponendovi formalmente $v(y) = G(x, y)$, e osservando che $\Delta u = f$ in Ω e $u = g$ su $\partial\Omega$. In realtà si pone $v = G_\epsilon(x, y) = \Gamma_\epsilon(x - y) + w(x, y)$ e si passa al limite per $\epsilon \to 0$, dove Γ_ϵ è tale che $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = 0$ per $|z| > \epsilon$ e $\Delta\Gamma_\epsilon(z) = \omega_n^{-1}\epsilon^{-n}$ per $|z| \leq \epsilon$, con ω_n il volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$ (in $\mathbb{R}^3$ si tratta del potenziale generato da una carica unitaria uniformemente distribuita sulla palla B_ϵ): si verifica facilmente che vale $\Gamma_\epsilon(x - y) = \Gamma(x - y)$ per $|x - y| \geq \epsilon$ (in particolare, per $y \in \partial\Omega$), e pertanto $G_\epsilon(x, y) = G(x, y)$ se $|x - y| \geq \epsilon$, da cui si ricava facilmente la convergenza al secondo membro della formula di rappresentazione integrale. Per quanto riguarda il primo membro, si ha inoltre

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(y)\Delta_y G_\epsilon(x, y) = \int_\Omega u(y)\Delta_y\Gamma_\epsilon(x - y) &= \int_{B(x,\epsilon)} u(y)\omega_n^{-1}\epsilon^{-n} \\ &= u(\xi) \quad \text{per un certo } \xi \in B(x, \epsilon)\,,\end{aligned}$$

per il teorema della media integrale. Passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ricava infine $\int_\Omega u(y)\Delta_y G_\epsilon(x, y)\, dy \to u(x)$ per $\epsilon \to 0$.

La determinazione della funzione di Green per domini dalla geometria semplice si può ottenere mediante il *metodo delle cariche immagini*: posta una carica nel punto $x \in \Omega$ se ne pongono altre in punti opportuni esterni a Ω in modo che il potenziale generato dalla distribuzione risultante abbia la frontiera $\partial\Omega$ come insieme di livello (ossia $\partial\Omega$ risulti una superficie equipotenziale): nel caso del semipiano (rispettivamente, del semispazio) viene posta una carica di segno opposto nel punto simmetrico rispetto al bordo: si ottiene cosìla rappresentazione integrale della soluzione mediante il nucleo di Poisson per il semipiano. Nel caso del cerchio (rispettivamente della palla), viene posta una carica di segno opposto (e intensità opportuna) nel punto inverso rispetto alla circonferenza (rispettivamente, alla sfera) che costituisce il bordo del dominio: si riottiene in questa maniera la rappresentazione via nucleo di Poisson per il cerchio.

Lezione del 8/1/16 (2 ore). Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$: per $u(t) \in L^1(\mathbb{R})$, si pone $\mathcal{F}(u)(\xi) \equiv \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t)e^{-2\pi i\xi t}dt$. Definizione per funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Motivazioni: analisi in frequenza di segnali non periodici (o distribuzioni statistiche o densità di probabilità), risoluzione di equazioni alle derivate parziali definite su tutto lo spazio. Confronto formale con le serie di Fourier e formula di inversione (sintesi o ricostruzione del segnale). Proprietà della trasformata di Fourier: $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}) \equiv C^0_b(\mathbb{R})$ è un operatore lineare e continuo: se $u \in L^1(\mathbb{R})$ allora $||\hat{u}||_{L^\infty} \leq ||u||_{L^1}$ e la a continuità di $\hat{u}$ discende immediatamente per convergenza dominata. In particolare, se $u_n \to u$ in $L^1(\mathbb{R})$ implica $\hat{u}_n \to \hat{u}$ uniformemente su $\mathbb{R}$. Inoltre $\hat{u}(\xi) \to 0$ per $|\xi| \to +\infty$ (si dice che $\hat{u} \in C^0_0(\mathbb{R})$, cfr. lemma di Riemann-Lebesgue): questo fatto si dimostra approssimando u in L^1 mediante opportune funzioni u_n le cui trasformate tendono esplicitamente a zero all'infinito, e sfruttando infine la convergenza uniforme delle trasformate.

Ad esempio: sia u_n una successione di funzioni semplici (combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli) convergenti in media ad $u \in L^1(\mathbb{R})$, allora $||\hat{u}_n - \hat{u}||_{L^\infty} \leq ||u_n - u||_{L^1} \to 0$, e vale $\hat{u}_n \in C^0_0(\mathbb{R})$, come si dimostra facilmente calcolando la trasformata della funzione caratteristica di un intervallo: posto $g(t) = 1$ per $|t| \leq a$ e $g(t) = 0$ per $|t| > a$, si ha $\hat{g}(\xi) = \frac{\sin(2\pi a\xi)}{\pi\xi}$, ovvero $\hat{g} \in C^0_0(\mathbb{R})$.

Comportamento della trasformata di Fourier rispetto a traslazioni e dilatazioni (formula del ritardo, modulazione, effetto Doppler), simmetrie (parità, disparità), coniugio. Trasformata della derivata. Relazione tra regolarità di u e decadimento all'infinito di $\hat{u}$ (e reciprocamente): $u, u', ..., u^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ implica $\hat{u}, |\xi|\hat{u}, ..., |\xi|^k\hat{u} \in C^0_0(\mathbb{R})$, e $u, tu, ..., t^k u \in L^1(\mathbb{R})$ implica $\hat{u}, (\hat{u})', ..., (\hat{u})^{(k)} \in C^0_0(\mathbb{R})$.

Lezione del 12/1/16 (2 ore). Formula di Parseval $\int \hat{u}v = \int u\hat{v}$ per $u, v \in L^1$ (conseguenza del teorema di Fubini). Formula di inversione della trasfomata di Fourier per $u \in L^1 \cap C^0_0(\mathbb{R})$ con $\hat{u} \in L^1$: si ha $\hat{\hat{u}}(t) = u(-t)$.

Dimostrazione: posto $v(x) = e^{-\pi x^2}$ e dette rispettivamente $v_\lambda(x) = v(\lambda x) = e^{-\pi^2\lambda^2 x^2}$, e $g_\lambda = \widehat{v_\lambda}$ (i.e. $g_\lambda(t) = |\lambda|^{-1}e^{-\pi\frac{x^2}{\lambda^2}}$), si ha, per convergenza dominata e usando la formula di Parseval,

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{u}}(t) &= \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)e^{-2\pi i\xi t} \cdot v_\lambda(\xi)\, d\xi = \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\tau_t u}(\xi) \cdot v_\lambda(\xi)\, d\xi \\
&= \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \tau_t u(y) \cdot g_\lambda(y)\, dy = \lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} u(\lambda z - t)e^{-\pi z^2}\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} u(-t)e^{-\pi z^2}\, dz = u(-t)\,.
\end{aligned}$$

□

Prodotto di convoluzione per funzioni $u, v \in L^1(\mathbb{R})$. Si definisce

$$u * v(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)\,dy\,.$$

Si ha $u * v = v * u$ e $(u * v) * w = u * (v * w)$ per ogni $u, v, w \in L^1(\Omega)$. Stima di continuità in $L^1(\mathbb{R})$: $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ allora $f * g \in C^0 \cap L^\infty$ e $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1\|g\|_\infty$. Regola di derivazione di un prodotto di convoluzione: se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in C_0^k(\mathbb{R})$ si ha $f * g \in C^k(\mathbb{R})$ e $[f * g]^{(k)} = f * [g^{(k)}]$.

Trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione: $\widehat{u * v} = \hat{u} \cdot \hat{v}$. Si ha inoltre $\hat{u} * \hat{v} = \widehat{u \cdot v}$.

Esempio: la convoluzione (i.e. filtro) di un segnale con la funzione seno cardinale sinc corrisponde alla moltiplicazione della trasformata con una funzione rettangolare (filtro passa-basso). Filtri gaussiani.

La Delta di Dirac δ_0 (alias impulso ideale alias massa/carica puntiforme unitaria in 0) come elemento neutro della convoluzione. Identità approssimate g_λ, per $\lambda \to 0^+$: data una funzione $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\int_{\mathbb{R}} g(x) = 1$ (alcuni esempi: $g(x) = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$, $g(x) = e^{-\pi x^2}$, $g(x) = \alpha\frac{\sin x}{x}$, $g(x) = \beta(1-x^2)^n\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$), si pone $g_\lambda(x) = |\lambda|^{-1}g(\lambda^{-1}x)$. Regolarizzazione e approssimazione di funzioni integrabili mediante convoluzione con identità approssimate regolari g_λ: per $u \in L^1(\mathbb{R})$ si ha $u_\lambda \equiv u * g_\lambda \to u$ in L^1 per $\lambda \to 0$, se $u \in C^0 \cap L^\infty(\mathbb{R})$ si ha $u_\lambda \to u$ uniformemente su $\mathbb{R}$. Si dice che $g_\lambda \to \delta_0$ nel senso delle distribuzioni (o nel senso delle misure o in legge).

Lezione del 15/1/16 (2 ore). Cenni alla definizione della trasformata di Fourier per la Delta di Dirac e in generale per funzioni impulsive o per funzioni periodiche, individuazione di stagionalità nei fenomeni via trasformata di F.

Trasformata di Fourier rispetto alla media quadratica $L^2(\mathbb{R})$, teorema di Plancherel (per $u \in L^1 \cap C_0^0 \cap L^2(\mathbb{R})$): $\|u\|_2 = \|\hat{u}\|_2$. Estensione della trasf. di Fourier ad una isometria suriettiva di $L^2(\mathbb{R})$: per $u \in L^2(\mathbb{R})$ si pone $\hat{u} := \lim \hat{u}_n$ dove il limite è inteso in $L^2(\mathbb{R})$ e $u_n \in L^1 \cap C_0^0 \cap L^2(\mathbb{R})$ è una successione tale che $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R})$ (per cui, per Plancherel, $\hat{u}_n$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R})$, che è completo, e dunque è convergente). Rappresentazione della trasformata di funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ come integrale nel senso del valor principale convergente per q.o. frequenza. Esempio: la trasformata della funzione $u(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Risoluzione dell'equazione del calore omogenea $u_t = u_{xx}$ su $(0,\infty)_t \times \mathbb{R}_x$ con dato iniziale $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$. Detta $v_t(x) = u(t,x)$ si definisce $w(t,\xi) = \widehat{v_t}(\xi)$ (trasformata di Fourier rispetto alla variabile spaziale). Si ha $w(0,\xi) = \widehat{u_0}(\xi)$ e $w_t(t,\xi) = -4\pi^2|\xi|^2w(t,\xi)$, da cui $w(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) \cdot \exp(-4\pi^2\xi^2 t)$. Antitrasformando, si ottiene $u(t,x) = u_0 * G_t(x)$, con $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp(-\frac{|x|^2}{4t}) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ il nucleo del calore, o soluzione fondamentale dell'equazione del calore (G_t risolve l'equazione del calore omogenea con dato iniziale $G_0 = \delta_0$). Dalle proprietà del nucleo del calore ($\int_{\mathbb{R}} G^t(x)\,dx = 1$ per ogni t, e per $t \to 0^+$ $G^t \to \delta_0$, ossia G^t è identità approssimata), si deducono le proprietà di regolarizzazione istantanea dell'equazione del calore, ossia $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}_x \times (0, +\infty)_t)$ proprietà di convergenza della soluzione al dato iniziale (dato che si tratta di una media pesata del dato iniziale, si avrà convergenza puntuale nei punti di continuità del dato iniziale, uniforme su intervalli compatti se il dato iniziale è continuo, ed in generale in norma L^1 se il dato iniziale è in L^1), proprietà di propagazione dei segnali a velocità infinita. Stime di stabilità per la soluzione rispetto al dato iniziale: si ha ad esempio $\|u(t,\cdot)\|_{\infty} \leq \|u_0\|_{\infty}\|G_t\|_1 = \|u_0\|_{\infty}$ (principio del massimo per l'eq. del calore), oppure la stima di decadimento $\|u(t,\cdot)\|_{\infty} \leq \|u_0\|_1\|G_t\|_{\infty} \leq C\|u_0\|_1 \cdot t^{-1/2}$, e stime analoghe per le derivate di u.

Cenno sull'equazione del calore e nucleo del calore in $\mathbb{R}^2$.

Lezione del 22/1/15 (2 ore). Segnali causali. Funzione di Heaviside. Funzioni $\mathcal{L}$-trasformabili. Trasformata di Laplace. Ascissa di convergenza. La trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel semipiano di convergenza (via Teorema di derivazione sotto il segno di integrale o via Teorema di Morera) e tende a zero per $\mathrm{Re}\,(s) \to +\infty$. Trasformata della funzone di Heaviside. Formula del ritardo e della modulazione. Trasformata di Laplace di polinomi, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali. Trasformata di Laplace e convoluzione, integrazione, derivazione. Relazione tra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier. Formula di inversione di Riemann-Fourier.

Lezione del 25/1/16 (2 ore). Formula di Heaviside per l'inversione di funzioni razionali. Teorema del valore iniziale e finale. Trasformata di Laplace della Delta di Dirac. Delta di Dirac come derivata (nel senso delle distribuzioni) della funzione di Heaviside. Applicazione alla risoluzione di problemi ai valori iniziali anche in presenza di termini impulsivi: struttura della soluzione come somma del prodotto di convoluzione del termine forzante con la soluzione fondamentale (anti-trasformata della cosiddetta funzione di trasferimento alias reciproco del polinomio caratteristico) e dell'anti-trasformata di una funzione razionale formata con il polinomio caratteristico ed i valori iniziali.

Risoluzione di equazioni integrali di tipo Volterra nel caso in cui il nucleo sia invariante per traslazioni (ovvero rappresenti un nucleo di convoluzione).