Esercitazioni di Analisi Matematica I

Dott.ssa Silvia Saoncella

a.a. 2010-2011

Queste sono le esercitazioni di Analisi Matematica I svolte per i Corsi di Laurea in Informatica/Bioinformatica presso l'Università degli Studi di Verona nell'anno accademico 2010-2011.

Essendo le prime che scrivo possono contenere sviste e/o errori che possono essere segnalati al seguente indirizzo: silvia.saoncella_3[at]studenti.univr.it

1 Esercitazione del 2-11-2010

Esercizio 1.
Dimostriamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$
al variare di $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$
Svolgimento.
Si usa la definizione di limite, dobbiamo dimostrare che
$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists\, n_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > n_\epsilon \text{ vale } |a_n - l| < \epsilon$$
Dobbiamo quindi imporre la seguente condizione
$$\left| \frac{1}{n^p} - 0 \right| < \epsilon$$
Determiniamo il valore di n_ϵ sviluppando:
$$\left| \frac{1}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad n^p > \frac{1}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad n > \sqrt[p]{\frac{1}{\epsilon}}$$
Pertanto, basta prendere $n > n_\epsilon$ dove n_ϵ è il primo numero intero minore o uguale a $\sqrt[p]{\frac{1}{\epsilon}}$.
Esercizio 2.
Dimostriamo che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$
Svolgimento.
In base alla definizione di limite imponiamo che
$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \epsilon$$
quindi
$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$
Pertanto, basta prendere $n > n_\epsilon$ dove n_ϵ è il primo numero intero minore o uguale a $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$.
Esercizio per casa.
Per casa provate a dimostrare che
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}} = 0$$
con $p > 2$.
Esercizio 3.
Mostrare che le successioni che hanno i seguenti termini generali
$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \quad , \quad b_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$$

sono crescenti.

Svolgimento.

a) Sappiamo che una successione

$$\{f_n\} \text{ è crescente se } f_{n+1} \geq f_n \quad \forall n$$

Dobbiamo quindi chiederci se

$$\frac{n}{n+2} \geq \frac{n-1}{n+1}$$

quindi

$$n(n+1) \geq (n-1)(n+2) \quad \Rightarrow \quad 0 \geq -2$$

Siccome la disuguaglianza $0 \geq -2$ è sempre verificata per ogni n possiamo concludere che la successione è definitivamente crescente.

b) Per casa.

Esercizio 4.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - n + n^2}{2n^2 - n^{3/2} + 1}$$

Svolgimento.

Forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Per eliminare l'indeterminazione occorre raccogliere il termine che cresce più rapidamente, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} - n + n^2}{2n^2 - n^{3/2} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{n} + 1\right)}{n^2\left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 5.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \sqrt{n}}{n + 6n^2}$$

Svolgimento.

Forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Per eliminare l'indeterminazione occorre raccogliere il termine che cresce più rapidamente, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n} + 6\right)} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 6.

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Svolgimento.

Forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Si razionalizza ricordando che $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Esercizio 7.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1}$$

Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$. Si razionalizza come nell'esercizio precedente, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n-n^2-1}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

raccogliamo n (termine che cresce più rapidamente), quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n-1}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 8.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}$$

Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. In base alla definizione di fattoriale si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = 0$$

Esercizio 9.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$$

Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$. Si razionalizza ricordando che $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\cdot \frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}} = 0$$

Esercizio 10.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-3n}-2n+1\right)$$

Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$. Si razionalizza, quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-3n}-2n+1\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n-(2n-1)^2}{\sqrt{4n^2-3n}+(2n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{4n^2-3n}+(2n+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4-\frac{3}{n}}+2-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 11.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$$

Forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Per eliminare l'indeterminazione occorre raccogliere il termine che cresce più rapidamente, quindi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(1+\frac{n^2}{2^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

Esercizio 12.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo 1^∞. Si utilizza il limite fondamentale $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=$ e, quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$$

Esercizio 13.
Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}$$

Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo 1^∞. Si procede come nell'esercizio precedente, quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/3}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^{12}=\mathrm{e}^{12}$$

Esercizio 14.
Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$
Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo 1^∞. Si procede come nell'esercizio precedente, quindi
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^0 = 1$$
Esercizio 15.
Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$$
Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo 1^∞. Si procede come nell'esercizio precedente, quindi
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{(n+1)/2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{2n}{n+1}} \\ &= \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}} = \mathrm{e}^2\end{aligned}$$
Esercizio 16.
Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)^n}{n^{2n}}$$
Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo 1^∞. Si procede come nell'esercizio precedente, quindi
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+1\right)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 1$$
Per casa.
Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$
Risultato. 0
Per casa.
Calcolare il seguente limite
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$
Risultato. 0

2 Esercitazione del 4-11-2010

Formula binomio Newton.
Iniziamo dimostrando che $\forall n, k \in \mathbb{N},\ \ n \geq k \geq 1$ si ha

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Consideriamo il primo membro e svolgiamo i calcoli usando la definizione di coefficiente binomiale

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{\underbrace{k!}_{k(k-1)!}\ (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\ \underbrace{(n-k+1)!}_{(n-k+1)(n-k)!}} \\
&= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)n!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora la formula del binomio di Newton: $\forall\, n \geq 0$ e $a, b > 0$ vale la formula

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Per dimostrarlo usiamo il principio di induzione:
Passo Base: $n = 0$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = a^0 b^0 = 1$$

quindi il passo base è verificato.
Passo induttivo: supponiamo la formula vera per n e verifichiamo che vale per $n+1$, cioè che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Si ha

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}
\end{aligned}$$

effettuiamo il seguente cambiamento di indice $k+1=h$ (quindi $k=h-1$) nella seconda sommatoria ed otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}=\sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^{n+1-h}b^{h}$$

osserviamo ora che h è una variabile muta, quindi possiamo sostituirla con k ottenendo infine che

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}$$

Allora ritornando al nostro calcolo

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k}\\&=\binom{n}{0}a^{n+1}b^{0}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^{k}+\binom{n}{n}a^{0}b^{n+1}\end{aligned}$$

Ora usando l'identità che abbiamo dimostrato precedentemente (con n sostituito da n+1) e ricordando le seguenti relazioni

$$\binom{n}{0}=1=\binom{n+1}{0}\qquad\text{e}\qquad\binom{n}{n}=1=\binom{n+1}{n+1}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=\binom{n+1}{0}a^{n+1}b^{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^{k}+\binom{n+1}{n+1}a^{0}b^{n+1}\\&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^{k}\end{aligned}$$

cioè la tesi.

3 Esercitazione del 09-11-2010

Esercizio 1.
Determinare se la successione data è limitata, definitivamente positiva, crescente o convergente.

$$a_n = \frac{2n^2}{n^2+1}$$

Svolgimento.
a) Per verificare che la successione data sia limitata, bisogna provare che esiste una costante $M \geq 0$ tale che $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi imponiamo che

$$\left|\frac{2n^2}{n^2+1}\right| \leq M \quad \Rightarrow \quad \frac{2n^2}{n^2+1} \leq M \quad \Rightarrow \quad (2-M)\,n^2 - M \leq 0$$

Se $M > 2$, si ha $(2-M)n^2 \leq 0$ e in particolare $M > 0$, quindi $(2-M)n^2 - M \leq 0$, ossia $(2-M)n^2 \leq M$, è sempre banalmente vera, avendo membro di sinistra negativo e membro di destra positivo. Quindi la nostra successione è limitata.

b) Una successione è definitivamente positiva se $a_n > 0\ \forall n$. E' immediato notare che a_n soddisfa la proprietà appena citata.

c) Una successione è monotona crescente se $a_{n+1} \geq a_n\ \forall n$. Quindi dobbiamo verificare che

$$\frac{2(n+1)^2}{(n+1)^2+1} > \frac{2n^2}{n^2+1} \quad \Rightarrow \quad (2n^2+4n+2)(n^2+1) > 2n^2(n^2+2n+2)$$

$$\Rightarrow \quad 4n+2 > 0 \quad \Rightarrow \quad n > -\frac{1}{2}$$

Quindi possiamo concludere che la successione $\{a_n\}$ è definitivamente crescente.

d) In base al teorema delle successioni monotone possiamo affermare che la successione a_n è convergente.

Esercizio 2.
Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Mostrare che la successione è crescente e limitata superiormente. Da ciò concludere che la successione converge e determinarne il limite.

1) Notiamo che $\{a_n\}$ è definitivamente positiva. $\{a_n\}$ è crescente se $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \quad \forall n$. Imponiamo che

$$\frac{a_n}{\sqrt{1+2a_n}} < 1$$

da cui

$$a_n < \sqrt{1+2a_n} \quad \Rightarrow \quad a_n^2 - 2a_n - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad a_n < 1+\sqrt{2}$$

(il valore $1-\sqrt{2}$ si esclude perché è negativo). Abbiamo trovato che a_n è crescente se e solo se $a_n < 1+\sqrt{2}$. Dobbiamo ora verificare che $a_n < 1+\sqrt{2}\ \ \forall n$. Per farlo si usa il

principio di induzione.
Passo base: $n = 1$

$$a_1 = 1 < 1 + \sqrt{2}$$

Passo induttivo: supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che vale che $a_n < 1 + \sqrt{2}$, e dobbiamo verificare che

$$a_{n+1} < 1 + \sqrt{2}$$

Quindi

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n} < 1 + \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad 1 + 2a_n < 1 + 2\sqrt{2} + 2 \quad \Rightarrow \quad a_n < 1 + \sqrt{2}$$

quindi possiamo concludere che la proprietà vale per ogni n, cioè che la successione è definitivamente crescente e inoltre limitata superiormente.

2) Siccome la successione è monotona e limitata per il teorema delle successioni monotone possiamo concludere che converge, cioè che ammette limite finito. Supponiamo quindi che la successione ammetta limite L. Quindi se $a_n \to L$, allora anche $a_{n+1} \to L$ (per l'unicità del limite). Prendendo la nostra successione $a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n}$ e passando al limite, otteniamo che

$$L = \sqrt{1 + 2L}$$

da cui

$$L^2 = 1 + 2L \quad \Rightarrow \quad L^2 - 2L - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = 1 + \sqrt{2}$$

(il valore $1 - \sqrt{2}$ si esclude perché è negativo). In conclusione abbiamo trovato che il limite è $1 + \sqrt{2}$.
Esercizio 3.
Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\dfrac{2n^2 - n}{3n^2 - \sqrt{n}}}$$

Svolgimento.
Consideriamo

$$\frac{2n^2 - n}{3n^2 - \sqrt{n}} = \frac{n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{n^2\left(3 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)} \longrightarrow \frac{2}{3} \qquad \text{n} \longrightarrow +\infty$$

quindi otteniamo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$$

Esercizio 4.
Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^{(n+1)/2}}$$

Svolgimento.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^{(n+1)/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n = +\infty$$

Esercizio 5.
Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}+2n^{-2}}{3n^{-2}+n^{-4}}$$

Svolgimento.
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^3}\right)}=\infty$$

Esercizio 6.
Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\dfrac{n^3+5n-1}{3n^3+5n^2-27}}$$

Svolgimento.
Consideriamo
$$\frac{n^3+5n-1}{3n^3+5n^2-27}=\frac{n^3\left(1+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(3+\dfrac{5}{n}-\dfrac{27}{n^3}\right)}\longrightarrow\frac{1}{3}\qquad \text{n}\longrightarrow+\infty$$

quindi si ottiene
$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{1/3}=\sqrt[3]{\mathrm{e}}$$

Esercizio 7.
Calcolare
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo $[\infty\cdot 0]$. Si razionalizza usando $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{1}{n}-1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\\&=\frac{2}{1+1}=1\end{aligned}$$

Esercizio 8.
Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

Svolgimento.
Osserviamo che
$$\sqrt[n]{2^n + 3^n} = \sqrt[n]{3^n} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$
quindi
$$\lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3$$

Esercizio 9.
Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{-n} + 2^{-n}}{3^{-n} + 4^{-n}}$$

Svolgimento.
Osserviamo che
$$\frac{5^{-n} + 2^{-n}}{3^{-n} + 4^{-n}} = \frac{\dfrac{1}{5^n} + \dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3^n} + \dfrac{1}{4^n}} = \frac{\dfrac{2^n + 5^n}{5^n \cdot 2^n}}{\dfrac{4^n + 3^n}{3^n \cdot 4^n}} = \frac{2^n + 5^n}{10^n} \cdot \frac{12^n}{4^n + 3^n} = \frac{2^n + 5^n}{4^n + 3^n} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^n$$
quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 5^n}{4^n + 3^n} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n \frac{5^n\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right)}{5^n\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)} = \infty \cdot \frac{1}{0} = \infty$$

Esercizio 10.
Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n + \sqrt{n}}{n^3 + 3}$$

Svolgimento.
Forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Raccolgo il termine che cresce più velocemente; l'esponenziale a numeratore e la potenza a denominatore. Quindi
$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{4^n}\right)}{n^3\left(1 + \frac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n^3} = +\infty$$
(nota: questo esercizio si poteva rivolvere anche considerando gli ordini di infiniti).

Esercizio 11.
Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n^5 + 1}{\mathrm{e}^n - n^5 - 2}$$

Svolgimento.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(1+\dfrac{n^5}{2^n}+\dfrac{1}{2^n}\right)}{\mathrm{e}^n\left(1-\dfrac{n^5}{\mathrm{e}^n}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n = 0$$

4 Esercitazione del 11-11-2010

Esercizio 1.
Applicando la definizione di convergenza di una serie stabilire il carattere delle seguente serie ed in caso trovarne la somma.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$$

Ricordiamo la definizione di convergenza di una serie: se esiste ed è finito il limite di $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ (successione delle somme parziali), allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.
Svolgimento.
Iniziamo con il scomporre $a_n = \frac{2}{n^2+2n}$ come somma di due funzioni,

$$\frac{2}{n^2+2n} = \frac{2}{n\,(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

Costruiamo la successione delle somme parziali:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 = 1 - \frac{1}{3} \\
s_2 &= a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\
s_4 &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

avendo trovato che il limite esiste ed è finito possiamo concludere che la serie converge e ha somma pari al valore del limite, cioè $\frac{3}{2}$ (il valore del limite è detto somma della serie).
Esercizio 2.
Verificare usando la condizione necessaria per la convergenza che la seguente serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k^5-3}$$

non converge.
Svolgimento.

Condizione necessaria: se limite $a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow \sum$ non converge.
Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^k}{k^5 - 3} = +\infty$$

quindi concludiamo che la serie diverge.
Esercizio 3.
Utilizzando il comportamento della serie geometrica, discutere il comportamento della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

e calcolarne la somma.
Svolgimento.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Abbiamo ottenuto la somma di due serie geometriche entrambe convergenti perché la ragione è < 1. Quindi la serie data converge alla somma delle due serie, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{5}{2}$$

quindi la somma è $25/6$.

Nota: in generale non si può spezzare una serie in due, a meno che entrambe le due somme non siano finite. Quindi prima è necessario lo studio della serie geometrica di ragione $2/5$ e $3/5$, e solo dopo si può scrivere l'uguaglianza che compare nella prima riga dello svolgimento con le serie.
Esercizio 4.
Calcolare la somma della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}}$$

Svolgimento.
Notiamo che

$$\frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = \frac{2^{2n} \cdot 2}{3^{2n}} = 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

a secondo membro abbiamo la serie geometrica di ragione $4/9 < 1$, quindi converge e ha somma pari a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}} = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^0\right) = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1\right) = 2\left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1\right) = \frac{8}{5}$$

Esercizio 5.
Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, n^3}{n^n}$$

Svolgimento.
Questa è una serie a termini positivi. Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^3}{n^n} = 0$$

possiamo concludere che la serie potrebbe convergere. Procediamo con lo studio della convergenza. Quando ci sono i fattoriali conviene usare il criterio del rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)^3}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\, n^3} = \frac{(n+1)\, n!\, (n+1)^3\, n^n}{(n+1)^n (n+1)\, n!\, n^3} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^3$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

quindi per il criterio del rapporto la serie converge.

Esercizio 6.
Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 2^{2n}}{5^n}$$

Svolgimento.
Questa è una serie a termini positivi. Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

possiamo concludere che la serie potrebbe convergere. Quando vediamo un qualcosa elevato alla n conviene usare il criterio della radice. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5\, 2^{2n}}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5} \cdot \frac{4}{5} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} < 1$$

quindi per il criterio della radice la serie converge.
Esercizio 7.
Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

Svolgimento.
Questa è una serie a termini positivi. Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Usiamo il criterio del confronto. L'obbiettivo è quello di confrontare il termine generale con la serie armonica. Poiché $n^2 + 1 > n^2 \ \forall n$, passando ai reciproci otteniamo che

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

A destra si ha la serie armonica generalizzata che converge in quanto l'esponente è > 1. Quindi per il criterio del confronto anche la prima serie converge.
Esercizio 8.
Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n}$$

Svolgimento.
Questa è una serie a termini positivi. Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Usiamo il criterio del rapporto, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\mathrm{e}^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{e}^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\mathrm{e}^n\,\mathrm{e}} \cdot \frac{\mathrm{e}^n}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$$

Quindi per il criterio del rapporto la serie converge.
Esercizio 9.
Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+5}{2n+3}\right)^{n^2}$$

Svolgimento.
Questa è una serie a termini positivi. Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{2n+3}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} = 0$$

Usiamo il criterio della radice, quindi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{2n+3}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{2n+3}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0 < 1$$

Quindi per il criterio della radice la serie converge.
Esercizio 10.
Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1}$$

Svolgimento.
Questa è una serie a termini positivi. Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Usiamo il criterio del confronto. L'obbiettivo è quello di confrontare il termine generale con la serie armonica. Poiché $n^2+1 > n^2\ \forall n$, passando ai reciproci otteniamo che

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n+1}}{n^2} < \frac{\sqrt{n+n}}{n^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+1} < \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$$

A destra si ha la serie armonica generalizzata che converge in quanto l'esponente è > 1.
Quindi per il criterio del confronto anche la prima serie converge.
Esercizio 11.
Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2-1}$$

Svolgimento.
Questa è una serie a termini positivi. Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Usiamo il criterio del confronto, quindi

$$\frac{n}{n^2-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n+1} > \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n}$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

A destra si ha la serie armonica che diverge. Quindi per il criterio del confronto anche la prima serie diverge.

Esercizio 12.

Studiare la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^n$$

Svolgimento.

Questa è una serie a termini positivi. Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Usiamo il criterio della radice, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 0 < 1$$

Quindi per il criterio della radice la serie converge.

5 Esercitazione del 16-11-2010

Esercizio 1.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{\sqrt{n\,(n+1)}}$$

Svolgimento. Riscrivendo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(5)^n}{\sqrt{n\,(n+1)}}$$

si nota che si tratta di una serie a segni alterni. Andando a calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(5)^n}{\sqrt{n\,(n+1)}} = +\infty$$

possiamo concludere che la serie non converge. (Si è usata la condizione necessaria di convergenza)

Esercizio 2.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{2n+1}}{n!}$$

Svolgimento. Si noti che $2n+1$ è un valore sempre dispari, quindi possiamo concludere che la serie è a termini negativi. Se si raccoglie un - la serie diventa a termini positivi e quindi si possono applicare i criteri per le serie a termini positivi. Studiamo la seguente serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!}$$

applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2(n+1)+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^{2n+1}} = \frac{3^{2n} \cdot 3^3 \cdot n!}{(n+1)n! \cdot 3^{2n} \cdot 3} = \frac{9}{n+1}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9}{n+1} = 0 < 1$$

quindi per il criterio del rapporto la serie studiata converge, quindi

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{n!}$$

converge.

Esercizio 3.

Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n!}{(n+2)!}$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini di segno alterno di termine generale $a_n = \frac{n!}{(n+2)!}$. Possiamo applicare in criterio di Leibniz. Abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} = 0$$

Verifichiamo che a_n sia decrescente

$$\frac{n!}{(n+2)!} \geq \frac{(n+1)!}{(n+3)!} \quad \Rightarrow \quad \frac{n!}{(n+2)(n+1)n!} \geq \frac{(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(n+1)} \geq \frac{1}{n+3} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 2$$

quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge. Si noti che l'esercizio sarebbe stato più semplice se avessimo studiato subito la convergenza assoluta. Infatti osservando che

$$n!/(n+2)! = 1/[(n+1)(n+2)]$$

la serie è assolutamente convergente per confronto asintotico con $1/n^2$, quindi convergente.

Esercizio 4.

Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n^2+6}{n^5+n+8}$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini positivi, proviamo ad applicare il criterio del confronto asintotico,

$$\frac{n^3+n^2+6}{n^5+n+8} \sim \frac{n^3}{n^5} = \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to +\infty$$

A secondo membro abbiamo il termine generale della serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, quindi in base al criterio del confronto asintotico possiamo affermare che la serie data converge.

Per casa.

Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{n+1}{n^2} \right)$$

Soluzione. Converge semplicemente.
Esercizio 5.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(1+n)}$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini positivi, proviamo ad applicare il criterio del confronto asintotico,

$$\frac{1}{\sqrt{n}\,(1+n)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}\cdot n} = \frac{1}{n^{3/2}} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

A secondo membro abbiamo il termine generale della serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$, quindi in base al criterio del confronto asintotico posiamo affermare che la serie data converge.
Esercizio 6.
Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a segni alterni di termine generale $a_n = \frac{-1}{\sqrt{n}+2}$
Calcoliamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}+2} = 0$$

Verifichiamo se a_n è decrescente

$$\frac{-1}{\sqrt{n+1}+2} \leq \frac{-1}{\sqrt{n}+2} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{n+1}+2 \geq \sqrt{n}+2 \qquad \Rightarrow \qquad 1 \geq 0$$

quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge.

Studiamo ora la convergenza assoluta. Andiamo a studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}+2}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$$

Si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{n}+2} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

A secondo membro abbiamo il termine generale della serie armonica generalizzata di esponente $1/2 < 1$, quindi in base al criterio del confronto asintotico posiamo affermare che la serie data non converge assolutamente.

Esercizio 7.
Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a segni alterni di termine generale $a_n = \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$. Andiamo a studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$$

Proviamo ad applicare il criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$$

quindi per il criterio della radice la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

Esercizio 8.
Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a segni alterni di termine generale $a_n = \frac{n-1}{n^2+n}$. Andiamo a studiare la convergenza di

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+n}$$

Proviamo ad applicare il criterio del confronto asintotico

$$\frac{n-1}{n^2+n} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

quindi per il criterio della confronto asintotico la serie data non converge assolutamente.

Studiamo la convergenza semplice. Andiamo a calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n^2+n} = 0$$

Verifichiamo se a_n è decrescente

$$\frac{n+1-1}{(n+1)^2+n+1} \leq \frac{n-1}{n^2+n} \quad \Rightarrow \quad n(n^2+n) \leq (n-1)(n^2+3n+2) \quad \Rightarrow \quad n^2-n-2 \geq 0$$

Si ha che l'ultima disequazione è verificata $\forall n \geq 2$, quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge.
Per casa.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2010}$$

Soluzione. Diverge.
Esercizio 9.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2010n+2009}$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini positivi. Proviamo ad applicare il criterio del confronto

$$\frac{1}{2010n+2009} = \frac{1}{2010} \cdot \frac{1}{n+\frac{2009}{2010}} > \frac{1}{2010} \cdot \frac{1}{n+1}$$

in quanto $\frac{2009}{2010} < 1$, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2010n+2009} > \frac{1}{2010} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2010} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} - 1 \right)$$

l'ultima serie presente nell'espressione precedente è la serie armonica, quindi per il criterio del confronto la serie data diverge.

Si noti che se si avesse applicato il criterio asintotico il risultato sarebbe stato immediato.
Esercizio 10.
Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a segni alterni di termine generale $a_n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.
Andiamo a studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Si ha, per confronto asintotico,

$$\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \sim \frac{1}{en} \quad \text{per } n \to +\infty$$

nel membro di destra si ha la serie armonica che diverge, quindi la serie data non converge assolutamente. Studiamo la convergenza semplice tramite il criterio di Leibniz. Calcoliamo il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 0$$

Si ha che a_n è decrescente. Infatti la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{e}}$ tende ad e ed è crescente. Ne segue che anche $n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mathrm{e}}$ è crescente e quindi passando al reciproco si trova che $a_n = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ è decrescente. Quindi per il criterio di Leibniz la serie di partenza converge semplicemente.

Esercizio 11.

Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini positivi. Proviamo a calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} = 0$$

quindi la serie potrebbe convergere. Proviamo ad applicare il criterio del confronto asintotico

$$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

a destra si ha la serie armonica, quindi per il criterio del confronto asintotico la serie data diverge.

6 Esercitazione del 18-11-2010

Esercizio 1.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$

Svolgimento. Il logaritmo è una funzione monotona crescente quindi è facile notare che $\log n > 1 \ \forall n \geq 3$. Notiamo inoltre che si tratta di una serie a termini positivi. Calcoliamo il limite del termine generale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

Quindi la serie potrebbe convergere. Usiamo il criterio del confronto

$$\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$$

quindi

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\log n}{n} > \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$$

a secondo membro abbiamo la serie armonica che diverge. Quindi per il criterio del confronto la serie data diverge.

Esercizio 2.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^2}$$

Svolgimento. La funzione coseno assume valori tra -1 e 1 compresi, quindi a numeratore abbiamo una quantità o sempre positiva o nulla. La serie data è a termini positivi. Calcoliamo il limite del termine generale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos n}{n^2} = 0$$

Quindi la serie potrebbe convergere. Per quanto detto si ha

$$0 < \frac{1-\cos n}{n^2} < \frac{2}{n^2}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n}{n^2} < 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

la serie a secondo membro è la serie armonica generalizzata che converge perché l'esponete è maggiore di 1. Quindi possiamo concludere, grazie al criterio del confronto, che la serie data converge.
Esercizio 3.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{n}$$

Svolgimento. Notiamo che $\sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$, cioè è un cambia segno, quindi ci troviamo di fronte ad una serie a termini di segno alterno. Studiamo dapprima la convergenza assoluta (in quanto la convergenza assoluta implica quella semplice):

$$|a_n| = \left|\frac{\sin(\pi/2 + n\pi)}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

essendo la serie dei moduli equivalente alla serie armonica concludiamo che la serie dei moduli non converge assolutamente (perché la serie armonica diverge). A questo punto proviamo a studiare la convergenza semplice. Visto che si tratta si una serie a segni alterni proviamo ad applicare il criterio di Leibniz. Verifichiamo la prima condizione del criterio:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Verifichiamo la seconda condizione del criterio:
è facile notare che $\{a_n\}$ è decrescente.

Essendo verificate entrambe le condizioni del criterio di Leibniz, possiamo concludere che la serie di partenza converge semplicemente.
Esercizio 4.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3 + 3}$$

Svolgimento. Notiamo che $\cos(\pi n) = (-1)^n$, cioè è un cambia segno, quindi ci troviamo di fronte una serie a termini di segno alterno. Studiamo la convergenza assoluta attraverso il criterio del confronto asintotico:

$$|a_n| = \left|\frac{\sqrt{n}\cos(\pi n)}{n^3 + 3}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 3} \sim \frac{\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^{5/2}}$$

A secondo membro abbiamo il termine generale della serie armonica generalizzata di esponente $5/2 > 1$, quindi in base al criterio del confronto asintotico posiamo affermare che la serie data converge assolutamente e quindi siccome convergenza assoluta implica quella semplice, abbiamo ottenuto anche la convergenza semplice.

Esercizio 5.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

Svolgimento. In questo caso ci troviamo di fronte ad una serie a termini di segno qualunque (non è a segni alterni). Dobbiamo studiare la convergenza assoluta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

dato che $|\sin n| \leq 1 \, \forall n$. A destra abbiamo la serie armonica generalizzata che converge perché l'esponente è maggiore di 1, per il criterio del confronto concludiamo che la serie di partenza converge assolutamente e quindi semplicemente.

Esercizio 6.
Studiare il comportamento della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \left[\log\left(\mathrm{e}^6 + \frac{2}{n}\right)\right]^n}{5^n - 7}$$

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini positivi, proviamo ad applicare il criterio della radice. Quindi

$$\sqrt[n]{\frac{n^3 \left[\log\left(\mathrm{e}^6 + \frac{2}{n}\right)\right]^n}{5^n - 7}} = \frac{\sqrt[n]{n^3} \log\left(\mathrm{e}^6 + \frac{2}{n}\right)}{\sqrt[n]{5^n - 7}}$$

andando a calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3} \log\left(\mathrm{e}^6 + \frac{2}{n}\right)}{\sqrt[n]{5^n - 7}} = \frac{6}{5} > 1$$

dove il primo fattore tende a 1, il secondo tende a 6, mentre il fattore a denominatore tende a 5. Siccome il limite è maggiore di 1, per il criterio della radice la serie data diverge.

Si noti che si sarebbe ottenuto lo stesso risultato applicando il criterio del rapporto oppure il criterio del confronto asintotico. Infatti $(\log(e^6 + 2/n))^n \geq 6^n$ e il termine $6^n/(5^n - 7)$ diverge.

Esercizio 7.
Determinare il dominio di

$$f(x) = \sqrt{\log x}$$

Svolgimento. Deve essere che

$$\begin{cases} \log x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

il sistema di destra ha per soluzione $x \geq 1$, quindi in definitiva abbiamo trovato che il dominio della nostra funzione è l'insieme

$$\mathrm{D} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 1\}$$

Esercizio 8.
Determinare il dominio di

$$f(x) = \sqrt{\frac{\log^2 x - 4}{\log x + 1}}$$

Svolgimento. Deve essere che

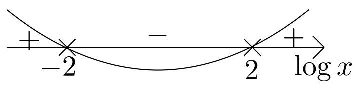
$$\begin{cases} \dfrac{\log^2 x - 4}{\log x + 1} \geq 0 \\ \\ \log x + 1 \neq 0 \\ \\ x > 0 \end{cases}$$

Andiamo a risolvere la prima disequazione. Studiamo il segno del numeratore

$$\log^2 x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \log x = \pm 2$$

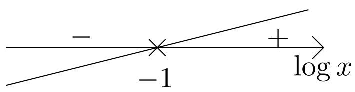
quindi

$\log^2 x - 4$



invece per quanto riguarda il denominatore si ha

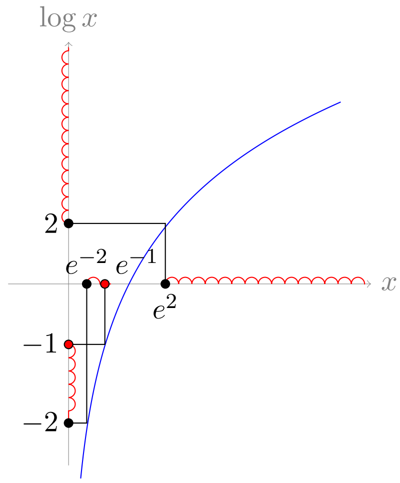
$\log x + 1$



passando al riquadro si ha

$\log x$		-2		-1		2	
$\log^2 x - 4$	$+$	×	$-$		$-$	×	$+$
$\log x + 1$	$-$		$-$	×	$+$		$+$
sol	NO	●	SI	●	NO	●	SI

le soluzioni trovate sono in $\log x$, per passare ad x si considera il grafico del logaritmo



quindi le soluzioni sono

$$\mathrm{e}^{-2} \leq x < \mathrm{e}^{-1} \quad \cup \quad x \geq \mathrm{e}^2$$

Da $\log x + 1 \neq 0$ troviamo che $x \neq e^{-1}$. Quindi riassumendo abbiamo trovato che

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-2} \leq x < \mathrm{e}^{-1} \quad \cup \quad x \geq \mathrm{e}^2 \\ x \neq e^{-1} \\ x > 0 \end{cases}$$

cioè che $\mathrm{e}^{-2} \leq x < \mathrm{e}^{-1} \cup x \geq \mathrm{e}^2$. In definitiva abbiamo che il dominio è

$$\mathrm{Dom}\, f(x) = \left\{ x \in \mathbb{R} |\, \mathrm{e}^{-2} \leq x < \mathrm{e}^{-1} \cup x \geq \mathrm{e}^2 \right\}$$

Esercizio 9.
Determinare il dominio di

$$f(x) = \frac{\log\left(\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 2\right) + \log|x-1|}{3 + \cos\sqrt{5 - \mathrm{e}^x}}$$

Svolgimento. Deve essere che

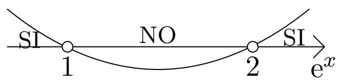
$$\begin{cases} \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 2 > 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ 5 - \mathrm{e}^x \geq 0 \\ 3 + \cos\sqrt{5 - \mathrm{e}^x} \neq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 2 > 0 \\ x - 1 \neq 0 \\ 5 - \mathrm{e}^x \geq 0 \end{cases}$$

in quanto la quarta disequazione è verificata $\forall x$. Infatti, siccome il coseno assume valori tra -1 e 1 compresi, si ha che il denominatore non si annulla mai. Andiamo a risolvere la prima disequazione:

$$\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^x = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

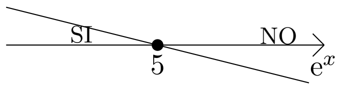
quindi

$$e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$$



invece per quanto riguarda la seconda disequazione si ha

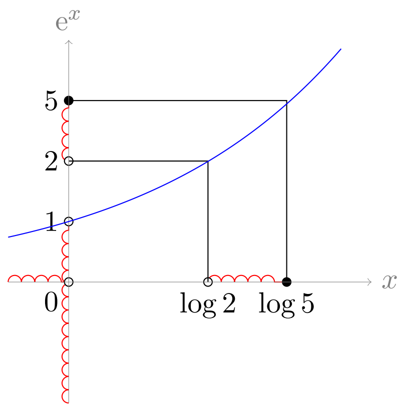
$$5 - e^x \geq 0$$



passando al riquadro si ha

e^x		1		2		5	
$e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$	SI		NO		SI		SI
$5 - e^x \geq 0$	SI		SI		SI		NO
sol	SI		NO		SI		NO

le soluzioni trovate sono in e^x, per passare ad x si considera il grafico dell'esponenziale



Le soluzioni sono

$$\begin{cases} x < 0 \cup \log 2 < x \leq \log 5 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

quindi in definitiva abbiamo trovato che il dominio è

$$\mathrm{Dom}\, f(x) = \{x \in \mathbb{R} |\, x < 0,\ x \neq 1\,, \log 2 < x \leq \log 5\}$$

7 Esercitazione del 23-11-2010

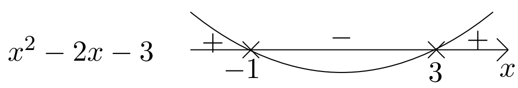
Esercizio 1.
Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x\,(x-1)} < 0$$

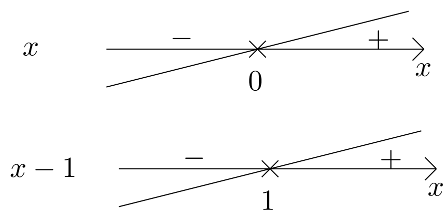
Svolgimento. Consideriamo il numeratore e ne studiamo il segno

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad x = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

quindi



invece per quanto riguarda il denominatore si ha



passando al riquadro si ha

x		-1		0		1		3	
x^2-2x-3	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$
x	$-$		$-$		$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
sol	NO		SI		NO		SI		NO

le soluzioni trovate sono: $-1 < x < 0 \;\; \cup \;\; 1 < x < 3$.

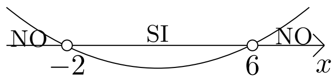
Esercizio 2.
Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x(x-4) < 12 \\ x(2x-1) + 3 > 4x \\ x^2 + x > -1 \end{cases}$$

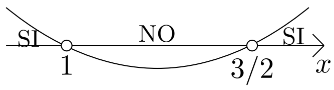
Svolgimento. Consideriamo la prima disequazione, portiamo tutto a primo membro e dallo studio del segno ricaviamo gli intervalli dove è soddisfatta

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$$

quindi

$x^2 - 4x - 12 < 0$ 

invece per quanto riguarda la seconda disequazione si ha

$2x^2 - 5x + 3 > 0$ 

Infine la terza disequazione $x^2+x+1 > 0$ è sempre soddisfatta $\forall x$ in quanto il discriminante è negativo. Passando al riquadro si ha

x		-2	1	$3/2$	6
$x^2-4x-12 < 0$	NO	SI	SI	SI	NO
$2x^2-5x+3 > 0$	SI	SI	NO	SI	SI
$x^2+x+1 > 0$	SI	SI	SI	SI	SI
sol	NO	SI	NO	SI	NO

In conclusione le soluzioni del sistema di disequazioni sono:

$$-2 < x < 1 \quad \cup \quad 3/2 < x < 6$$

Esercizio 3.
Risolvere la seguente disequazione irrazionale

$$3 - 2x > \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

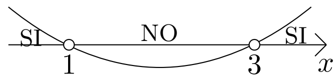
Svolgimento. Affinché il radicale abbia significato deve essere che

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

quindi andando a risolvere otteniamo

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{e} \quad x = 3$$

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$



Affinché la disuguaglianza abbia senso bisogna imporre che

$$3 - 2x > 0$$

da cui

$$x < \frac{3}{2}$$

Infine, siccome si eleva a quadrato, di deve imporre che

$$(3 - 2x)^2 > x^2 - 4x + 3$$

quindi portando tutto a primo membro troviamo $3x^2 - 8x + 6 > 0$. Siccome il discriminante è negativo la disequazione è sempre soddisfatta $\forall x$. Procediamo con la costruzione del riquadro

x		1		3/2		3	
$x^2 - 4x + 3 \geq 0$	SI	•	NO		NO	•	SI
$3 - 2x > 0$	SI		SI	○	NO		NO
$3x^2 - 8x + 6 > 0$	SI		SI		SI		SI
sol	SI	•	NO		NO		NO

In definitiva la soluzione della disequazione è $x \leq 1$.

Esercizio 4.

Risolvere la seguente disequazione irrazionale

$$x - 2 < \sqrt{4 - x}$$

Svolgimento. In questo caso il membro di sinistra può essere negativo, ma anche positivo. Pertanto si devono risolvere i seguenti sistemi

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 4 - x > 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ 4 - x > (x - 2)^2 \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzione $x < 2$

Consideriamo il secondo sistema: la prima disequazione è risolta per $x < 4$, la seconda per $x \geq 2$, mentre per quanto riguarda la terza disequazione si ha

$$4 - x > (x - 2)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < x < 3$$

considerando l'intersezione delle tre soluzioni trovate si ha che il secondo sistema ha come soluzione $2 \le x < 3$. Ora dobbiamo prendere l'unione delle due soluzioni trovate dei due sistemi, quindi la soluzione della nostra disequazione di partenza è $x < 3$.

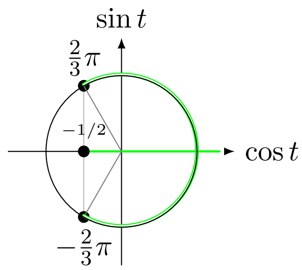
Esercizio 5.

Risolvere la seguente disequazione

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$$

Svolgimento. Poniamo per semplicità $t = 3x - \frac{\pi}{3}$ ed andiamo a considerare la circonferenza trigonometrica. Si deve riportare sull'asse del coseno il valore $-\frac{1}{2}$ e contrassegnare l'intervallo in cui la disequazione $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$ è soddisfatta. Si procede andando a proiettare sulla circonferenza gli intervalli considerati per trovare gli angoli corrispondenti e le parti di circonferenza che corrispondono alla soluzione. Graficamente si ha

$\cos t > -\frac{1}{2}$



Se consideriamo l'intervallo $[-\pi, \pi]$ la soluzione diventa

$$2k\pi - \frac{2}{3}\pi < t < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

quindi tornando alla x

$$2k\pi - \frac{2}{3}\pi < 3x - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

infine le soluzioni sono

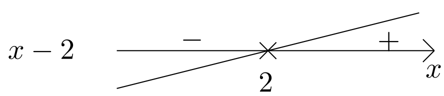
$$-\pi/9 + 2/3k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2/3k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

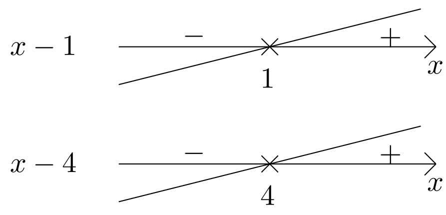
Esercizio 6.

Risolvere la seguente disequazione con i moduli

$$|x-2| + |x-1| - 2|x-4| - x + 2 \ge 0$$

Svolgimento. Procediamo con lo studio del segno degli argomenti di ciascun modulo





passando al riquadro si ha

x		1		2		4	
$x-2$	$-$		$-$	$\times$	$+$		$+$
$x-1$	$-$	$\times$	$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	$\times$	$+$

si sono così trovati 4 casi:

1° caso

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ -(x-2)-(x-1)+2(x-4)-x+2 \geq 0 \end{cases}$$

consideriamo la seconda disequazione

$$-(x-2)-(x-1)+2(x-4)-x+2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \leq -3$$

in definitiva si che il sistema ha come soluzione $x \leq -3$.

2° caso

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -(x-2)+(x-1)+2(x-4)-x+2 \geq 0 \end{cases}$$

consideriamo la seconda disequazione

$$-(x-2)+(x-1)+2(x-4)-x+2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 5$$

in definitiva si che il sistema ha come soluzione $\emptyset$.

3° caso

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ (x-2)+(x-1)+2(x-4)-x+2 \geq 0 \end{cases}$$

consideriamo la seconda disequazione

$$(x-2)+(x-1)+2(x-4)-x+2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 3$$

in definitiva si che il sistema ha come soluzione $3 \leq x < 4$.

4° caso

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ (x-2)+(x-1)-2(x-4)-x+2 \geq 0 \end{cases}$$

consideriamo la seconda disequazione

$$(x-2)+(x-1)-2(x-4)-x+2 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 7$$

in definitiva si che il sistema ha come soluzione $4 \leq x \leq 7$.
Dopo aver risolto i singoli sistemi si deve considerare l'unione delle soluzioni trovate, cioè

$$x \leq -3 \quad \cup \quad \emptyset \quad \cup \quad 3 \leq x < 4 \quad \cup \quad 4 \leq x \leq 7$$

quindi in definitiva si ha che la soluzione della disequazione con i moduli è

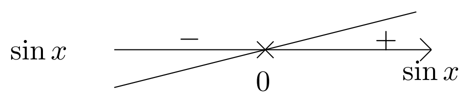
$$x \leq -3 \quad \cup \quad 3 \leq x \leq 7$$

8 Esercitazione del 24-11-2010

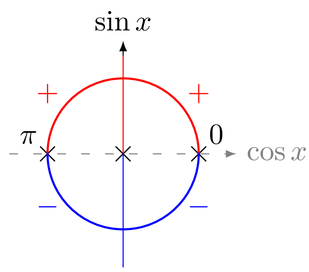
Esercizio 1.
Risolvere la seguente disequazione

$$\sin x\,(\sin x + \cos x) \leq 0$$

con $-\pi \leq x \leq \pi$
Svolgimento.
Consideriamo il primo fattore e studiamone il segno in funzione di $\sin x$. Vedo il fattore $\sin x$ come l'equazione di una retta crescente che intercetta l'asse $\sin x$ nell'origine (è come se avessi eseguito un cambio di variabile ponendo $t = \sin x$)



ma bisogna considerare il segno in funzione di x, quindi si considera la circonferenza trigonometrica andando a riportare lo studio del segno appena eseguito. Si proiettano i risultati ottenuti passando dall'asse $\sin x$ all'asse x, rappresentato dalla circonferenza. Otteniamo:



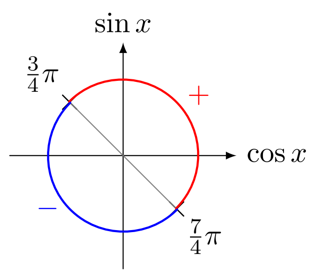
Consideriamo ora il secondo fattore, ponendolo uguale a zero si ha

$$\sin x + \cos x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin x = -\cos x$$

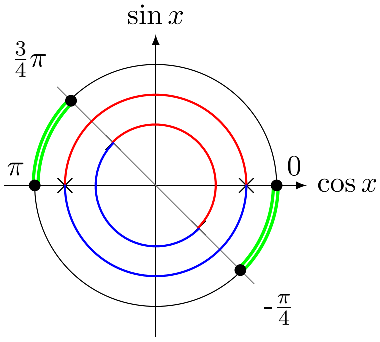
andiamo a tracciare sulla circonferenza trigonometrica i valori per cui il seno è uguale a meno il coseno. I valori trovati mi andranno a dividere la circonferenza in due parti, una positiva e una negativa. Per capire di quale parte si tratta basta dare un valore all'espressione $\sin x + \cos x$, per esempio per

$$x = \frac{\pi}{2} \qquad \sin x + \cos x > 0$$

Graficamente si ha



Ora dobbiamo considerare il prodotto dei segni dei due fattori. Disegniamo tre circonferenze concentriche: nella prima metteremo i segni del primo fattore, nella seconda quelli del secondo e nella terza il loro prodotti, cioè il segno della disequazione e quindi le soluzioni:



In conclusione le soluzioni sono: $-\pi/4 \leq x \leq 0 \ \cup \ 3/4\pi \leq x \leq \pi$.

Esercizio 2.

Risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x > 0$$

Svolgimento.

Controllo se $\cos x = 0$, cioè $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ è una soluzione della disequazione. Si ha

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \sqrt{3} > 0$$

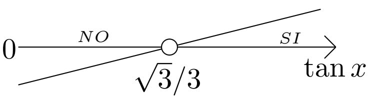
quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è una soluzione. Suppongo ora $\cos x \neq 0$ e divido ambo i membri per $\cos x$. Poiché la funzione coseno non ha segno costante, bisogna distinguere i due casi in cui $\cos x < 0$ e $\cos x > 0$ ottenendo così due sistemi da risolvere:

$$\begin{cases} \sqrt{3}\tan x - 1 > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} \sqrt{3}\tan x - 1 < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

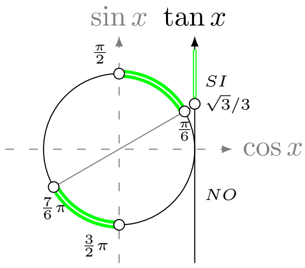
Andiamo a risolvere il primo sistema. Consideriamo la prima disequazione

$$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

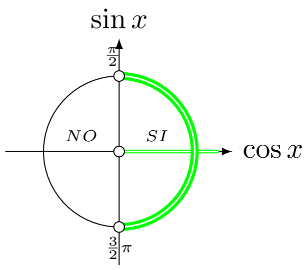
quindi

$\sqrt{3}\tan x - 1 > 0$ 

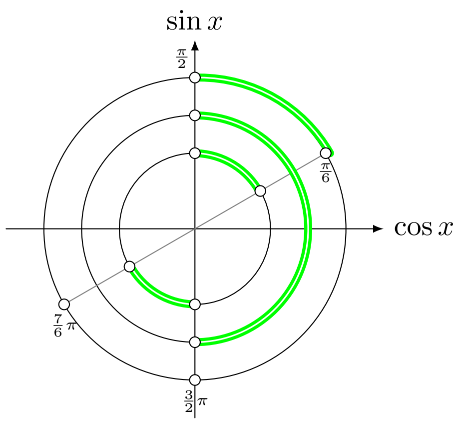
ma bisogna considerare il segno in funzione di x, quindi considero la circonferenza trigonometrica



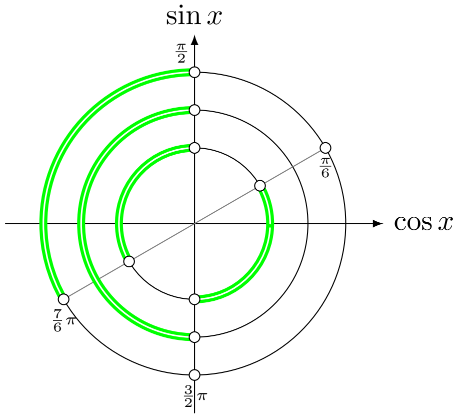
per quanto riguarda la seconda disequazione si ha



infine considerando l'intersezione delle soluzioni trovate



si trova la soluzione del primo sistema: $\pi/6 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi$. Mentre per quanto riguarda il secondo sistema si ha



quindi la soluzione del secondo sistema: è $\pi/2 + 2k\pi < x < 7/6\pi + 2k\pi$. Infine si deve prendere l'unione delle soluzioni dei due sistemi, quindi la soluzione della disequazione è

$$\pi/6 + 2k\pi < x < 7/6\pi + 2k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

osservando che $\pi/2 + k\pi$ è già compreso nell'intervallo delle soluzioni.
Altro modo per risolvere l'esercizio: si poteva anche dividere per $1/2$ e osservare che

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \sin \frac{\pi}{3} \sin x - \cos \frac{\pi}{3} \cos x = -\cos(x + \pi/3),$$

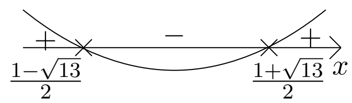
quindi l'equazione diviene $\cos(x + \pi/3) < 0$ per le formule di addizione del coseno, da cui $\pi/2 + 2k\pi < x + \pi/3 < 3\pi/2 + 2k\pi$ che implica $\pi/6 + 2k\pi < x < 7\pi/6 + 2k\pi$.
Esercizio 3.
Risolvere la seguente disequazione con il modulo

$$|x^2 - x - 3| < 2x + 1$$

Svolgimento.
Come primo passo si esegue uno studio del segno dell'argomento del modulo, quindi

$$x^2 - x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

quindi

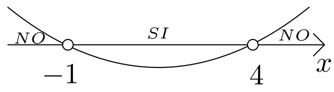
$x^2 - x - 3$ 

Abbiamo due casi:
1° caso

$$\begin{cases} x^2 - x - 3 < 2x + 1 \\ x \leq \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \cup \quad x \geq \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Andando a risolvere la prima disequazione si ha

$x^2 - 3x - 4 < 0$



tenendo conto della seconda espressione si ha che la soluzione del sistema è

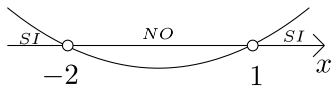
$$\frac{1+\sqrt{13}}{2} \leq x < 4$$

2° caso

$$\begin{cases} -(x^2 - x - 3) < 2x + 1 \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Andando a risolvere la prima disequazione si ha

$x^2 + x - 2 > 0$



tenendo conto della seconda espressione si ha che la soluzione del sistema è

$$1 < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

Per concludere bisogna prendere l'unione delle soluzioni trovate, quindi la soluzione della disequazione è

$$1 < x < 4$$

Esercizio 4.
Studiare il dominio di

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})}$$

Svolgimento.
Deve essere

$$\begin{cases} x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x}) \neq 0 \\ 1 + \sqrt[3]{x} > 0 \end{cases}$$

Affinché $x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x}) \neq 0$ deve essere sia che $x^2 \neq 0$, sia che $\log(1 + \sqrt[3]{x}) \neq 0$, ovvero le due condizioni debbono essere simultaneamente vere. Quindi

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

mentre

$$\log\left(1 + \sqrt[3]{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \log\left(1 + \sqrt[3]{x}\right) = \log \mathrm{e}^0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \sqrt[3]{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Da entrambe le disuguaglianze si ricava $x \neq 0$. Consideriamo la seconda disequazione

$$1 + \sqrt[3]{x} > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

Pertanto il dominio è $]-1, 0[\cap]0, +\infty[$.

9 Esercitazione del 25-11-2010 (2 ore)

Esercizio 1.
Risolvere il seguente limite
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3+1}{\sqrt{x}+x^2-x^3}$$

Svolgimento.
Si ha una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Si raccoglie il termine che cresce più velocemente. Quindi
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3+1}{\sqrt{x}+x^2-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{-x^3}=-\infty$$

Esercizio 2.
Risolvere il seguente limite
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$$

Svolgimento.
Si ha una forma indeterminata del tipo $[-\infty+\infty]$. Svolgendo i calcoli
$$\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}=\frac{2x^3+4x^2}{(3x^2-4)(3x+2)}$$
quindi
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+4x^2}{(3x^2-4)(3x+2)}=\frac{2}{9}$$

Esercizio 3.
Risolvere il seguente limite
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}}$$

Svolgimento.
Si ha una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Si raccoglie il termine che cresce più velocemente. Quindi
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}}=\frac{\pm1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 4.
Risolvere il seguente limite
$$\lim_{x\to2}\frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}$$

Svolgimento.
Si ha una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore usando il metodo di Ruffini.

Scomponiamo in fattori il numeratore $N(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 12$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & -5 & -4 & 12 \\
 & & & & \\
2 & & 4 & -2 & -12 \\
\hline
 & 2 & -1 & -6 & 0
\end{array}$$

abbiamo ottenuto

$$N(x) = (2x^2 - x - 6)(x - 2)$$

Scomponiamo in fattori il denominatore $D(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -4 & 5 & -4 & 4 \\
 & & & & & \\
2 & & 2 & -4 & 2 & -4 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0
\end{array}$$

abbiamo ottenuto

$$D(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 2)(x - 2)$$

Prima di procedere nella scomposizione proviamo a ricalcolare il limite,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 12}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} &= \lim_{x\to 2} \frac{(2x^2 - x - 6)(x - 2)}{(x^3 - 2x^2 + x - 2)(x - 2)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \left[\frac{0}{0}\right]
\end{aligned}$$

abbiamo riottenuto una forma indeterminata, quindi dobbiamo continuare con la scomposizione in fattori. Scomponiamo il numeratore dell'ultimo limite ottenuto,

$$2x^2 - x - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1 \pm 7}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$$

quindi $N(x) = 2(x-2)(x+\frac{3}{2}) = (x-2)(2x+3)$. Scomponiamo il fattore a denominatore

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 2 & -5 & -4 & 12 \\
 & & & & \\
2 & & 4 & -2 & -12 \\
\hline
 & 2 & -1 & -6 & 0
\end{array}$$

quindi $D(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$

In conclusione abbiamo trovato il seguente

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x+3)}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{7}{5}$$

Esercizio 5.

Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

Svolgimento.
A numeratore si ha una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Si razionalizza ricordando che $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = 1\end{aligned}$$

Esercizio 6.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\cos x\right)$$

Svolgimento.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}+\cos x\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(1+\overbrace{\frac{\cos x}{\sqrt{x}}}^{\nearrow 0}) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$$

in quanto $\cos x$ è limitata.
Esercizio 7.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}$$

Svolgimento.
Essendo $\sin\frac{1}{x}$ limitata e $\sqrt{x}\to 0$ per $x\to 0^+$ si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} = 0$$

Esercizio 8.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^{2x}$$

Svolgimento.
In questo caso ci si deve ricondurre al limite fondamentale $\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$. Eseguiamo il seguente cambio di variabile ponendo

$$-\frac{\pi}{x} = \frac{1}{t} \qquad \Rightarrow \qquad x = -\pi t$$

Se $x\to-\infty$ allora $t\to+\infty$, quindi andando a sostituire otteniamo il seguente

$$\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2\pi t} = \left[\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-2\pi} = \mathrm{e}^{-2\pi}$$

Esercizio 9.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{2x}+2^{-x}}{(2^x-1)^2}$$

Svolgimento.
Si ha una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Si raccoglie il termine che cresce più velocemente. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{2x}\left(1+2^{-3x}\right)}{2^{2x}\left(1-2^{-x}\right)^2} = 1$$

se invece avessimo avuto il seguente limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^{2x}+2^{-x}}{(2^x-1)^2}$$

avremmo ottenuto

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{2^{2x}}^{\nearrow 0}+\overbrace{2^{-x}}^{\nearrow +\infty}}{(\overbrace{2^{x}}^{\nearrow 0}-1)^2} = +\infty$$

Esercizio 10.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$$

Svolgimento.
Si ha una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Si razionalizza ricordando che $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, quindi

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} &= \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}\\ &= \frac{1+x-1+x}{x\left[\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right]} \longrightarrow \frac{2}{3}\end{aligned}$$

per $x \longrightarrow 0$.

Esercizio 11.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{\sqrt{x}-1}$$

Svolgimento.

Per la stessa motivazione usata nell'esercizio 6, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(1+\frac{\overbrace{\cos x}^{\nearrow 0}}{x})}{\sqrt{x}(1-\frac{\overbrace{1}^{\nearrow 0}}{\sqrt{x}})} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$$

Esercizio 12.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^4-x^3+1}{1-x^3}$$

Svolgimento.
Si ha

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^4-x^3+1}{1-x^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Il fattore $1-x^3$ determina il segno dello zero. Quando mi avvicino a 1 da destra il fattore $1-x^3$ assume valori sempre negativi fino ad annullarsi, quindi posso dedurre che lo zero trovato è un 0^-.
Esercizio 13.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^3+x^2-2x-8}$$

Svolgimento.
Si ha una forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore usando il metodo di Ruffini. Scomponiamo in fattori il numeratore $N(x) = x^3-2x^2-4x+8$

	1	-2	-4	8
2		2	0	-8
	1	0	-4	0

abbiamo ottenuto

$$N(x) = (x^2-4)(x-2)$$

Scomponiamo in fattori il denominatore $D(x) = x^3+x^2-2x-8$

	1	1	-2	-8
2		2	6	8
	1	3	4	0

abbiamo ottenuto

$$D(x) = (x^2 + 3x + 4)(x - 2)$$

Prima di procedere nella scomposizione proviamo a ricalcolare il limite,

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 4)(x - 2)}{(x^2 + 3x + 4)(x - 2)} = 0$$

Esercizio 14.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

Svolgimento.
Abbiamo un'espressione in cui sono presenti sia la funzione $\sin x$ che la funzione $\cos x$ e questo ci disturba. Quindi riscriviamo l'espressione trasformando il seno in coseno in base alle formule, quindi

$$\frac{1 - \cos x + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 - \cos x + 1 - \cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x - \cos x + 2}{1 - \cos^2 x} = \frac{-(\cos x + 2)(\cos x - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 2}{1 + \cos x} = \frac{3}{2}$$

10 Esercitazione del 01-12-2010

Esercizio 1.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+\sqrt{e^{x^2}-1}\right)}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Svolgimento.
Si sfruttano i seguenti limiti fondamentali $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ quindi per prima cosa si verifica che $\sqrt{e^{x^2}-1} \to 0$ per $x \to 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+\sqrt{e^{x^2}-1}\right)}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \frac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\sqrt{e^{x^2}-1}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\sqrt{1-\cos x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \\
&\qquad \sqrt{1-\cos x}\sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{e^{x^2}-1}\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} \cdot \frac{x}{x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{e^{x^2}-1}\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}} \cdot \sqrt{1+\cos x} \\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Nota: siccome la funzione di cui si calcola il limite è pari, esiste anche il limite per $x \to 0^-$ e vale $\sqrt{2}$. **Esercizio 2.**
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi al limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$. Si esegue un cambio di variabile ponendo

$$y = x - 1 \quad \Rightarrow \quad \text{quando } \ x \to 1 \quad \text{si ha che } \ y \to 0$$

andando a sostituire si ottiene il seguente

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(y+1)}{y} = 1$$

Esercizio 3.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^3 x}{x(1-\cos x)}$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi ai seguenti limiti fondamentali $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^3 x}{x(1-\cos x)} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 \cdot \frac{x^2}{1-\cos x} = 2$$

Esercizio 4.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{e^{2x}-1}$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi ai seguenti limiti fondamentali $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{2x}{e^{2x}-1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Esercizio 5.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^3 - 1}{\sin x^5}$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi ai seguenti limiti fondamentali $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\left(1-\cos x^3\right)}{x^5} \cdot \frac{x^5}{\sin x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{-\left(1-\cos x^3\right)}{\left(x^3\right)^2} \cdot x = 0$$

Esercizio 6.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi ai seguenti limiti fondamentali $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 7.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{2\sin(x-1)}{x^2-1} \cdot \frac{e^{(x^2-1)}-1}{x-1}$$

Svolgimento.

Si vuole ricondursi ai seguenti limiti fondamentali $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, quindi si esegue il seguente cambio di variabile andando a porre

$$y = x-1 \qquad \text{quindi se} \quad x\to 1 \qquad \text{allora} \quad y\to 0$$

quindi andando a sostituire si ottiene

$$\lim_{y\to 0}\frac{2\sin y}{(y+1)^2-1}\cdot\frac{e^{\overbrace{\left((y+1)^2-1\right)}^{\nearrow 0}}-1}{y}=2$$

Si noti che si sarebbe potuto risolvere il limite direttamente, senza eseguire il cambio di variabili, dopo essersi accertati che gli argomenti $x-1\to 0$ e $x^2-1\to 0$ per $x\to 1$.

Esercizio 8.

Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(2^x-3^x)}{1-\cos 3x}$$

Svolgimento.

Si vuole ricondursi ai seguenti limiti fondamentali $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a$, quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(2^x-3^x)}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2^x\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x-1\right)}{1-\cos 3x}\cdot\frac{(3x)^2}{9x}=-\frac{2}{9}\log(3/2)$$

Esercizio 9.

Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to \mathrm{e}}\frac{\log x-1}{x-\mathrm{e}}$$

Svolgimento.

Si vuole ricondursi ai seguente limite fondamentale $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$, quindi si esegue il seguente cambio di variabile andando a porre

$$y = x-\mathrm{e} \qquad \text{quindi se} \quad x\to \mathrm{e} \qquad \text{allora} \quad y\to 0$$

quindi andando a sostituire si ottiene

$$\lim_{y\to 0}\frac{\log(y+\mathrm{e})-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\log\left(\mathrm{e}\left(1+\frac{y}{e}\right)\right)-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\log\mathrm{e}+\log\left(1+\frac{y}{\mathrm{e}}\right)-1}{\frac{y}{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

11 Esercitazione del 02-12-2010

Esercizio 1.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x \to \mathrm{e}} \frac{\log x - 1}{x - \mathrm{e}}$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi ai seguente limite fondamentale $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, quindi si esegue il seguente cambio di variabile andando a porre

$$y = x/\mathrm{e} \qquad \text{quindi se} \quad x \to \mathrm{e} \qquad \text{allora} \quad y \to 1$$

quindi andando a sostituire si ottiene

$$\lim_{y \to 1} \frac{\log \mathrm{e}y - 1}{\mathrm{e}y - \mathrm{e}} = \lim_{y \to 1} \frac{\log \mathrm{e} + \log y - 1}{\mathrm{e}(y-1)} = \frac{1}{\mathrm{e}} \lim_{y \to 1} \frac{\log y}{y - 1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \lim_{z \to 0} \frac{\log(z+1)}{z} = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

Esercizio 2.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} \log x \log(1-x)$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi al limite fondamentale $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} x^b \log x = 0$. Si esegue un cambio di variabile ponendo

$$y = -x \qquad \text{quindi se} \quad x \to 0^+ \qquad \text{allora} \quad y \to 0^-$$

quindi

$$\lim_{y \to 0^-} \log(-y) \log(1+y) = \lim_{y \to 0^-} (-y) \log(-y) \frac{\log(1+y)}{-y} = 0$$

Esercizio 3.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{x}{1-x}}$$

Svolgimento.
Si consideri la seguente uguaglianza

$$x^{\frac{x}{1-x}} = \mathrm{e}^{\log x^{\frac{x}{1-x}}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x} \log x}$$

quindi

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{x}{1-x}} = \lim_{x \to 1} \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x} \log x} = \lim_{y \to 0} \mathrm{e}^{-(1+y) \frac{\log(1+y)}{y}} = \mathrm{e}^{\lim_{y \to 0} -(1+y) \frac{\log(1+y)}{y}} = \mathrm{e}^{-1}$$

avendo posto y=x-1 e usato il limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$.
Esercizio 4.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$$

Svolgimento.
Si consideri la seguente uguaglianza

$$x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$$

quindi usando il seguente limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x \log x} - 1}{x} \cdot \frac{\log x}{\log x} = -\infty$$

Esercizio 5.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x} \qquad \text{con } 0 < a < 1$$

Svolgimento.
Si esegue il seguente cambio di variabile ponendo

$$y = \log_a x \qquad \text{quindi se} \quad x \to +\infty \qquad \text{allora} \quad y \to -\infty$$

quindi

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{y\to -\infty} \frac{y}{a^y} = 0$$

Esercizio 6.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{2x} - 1}{2x}$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi al seguente limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{2x} - 2 + 1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2(e^{2x} - 1)}{2x} + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} = 2 + \infty = +\infty$$

Esercizio 7.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{e^x - e}$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi ai seguenti limiti fondamentali $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.
Si esegue un cambio di variabile ponendo

$$y = x - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \text{quando} \quad x \to 1 \qquad \text{si ha che} \quad y \to 0$$

quindi

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{e^x - e} = \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{e(e^{x-1}-1)} = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{e(e^y-1)}\cdot\frac{y}{y} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 8.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$$

Svolgimento.
Si razionalizza ricordando che $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}\cdot\frac{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-1+\tan x}{\sin x\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{\sin x}\cdot\frac{x}{x} = 1\end{aligned}$$

Esercizio 9.
Risolvere il seguente limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2(x)+x}-e^x}{\log(\pi\tan^2 x+1)}$$

Svolgimento.
Si vuole ricondursi ai seguenti limiti fondamentali $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$. Quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^{\sin^2 x}-1)}{\log(\pi\tan^2 x+1)}\cdot\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\cdot\frac{\pi\tan^2 x}{\pi\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin^2 x}{\pi\tan^2 x}\cdot\frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{\pi}$$

12 Esercitazione del 09-12-2010

Esercizio 1.
Determinare se la funzione $f(x)$ è continua nel suo dominio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Svolgimento.
$f(x)$ è una funzione definita per casi e l'unico punto punto in cui si va a studiare la continuità è il punto di raccordo $x = 0$. Bisogna verificare che il valore assunto dal limite sinistro della funzione, coincida con quello assunto dal limite destro e con quello assunto dalla funzione nel punto $x = 0$. Quindi

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

Si ha che $f(0) = 0$, quindi si conclude che la funzione è continua in tutto il suo dominio.
Esercizio 2.
Per quali valori $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{se } x < 0 \\ x - a^2 + 2a & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

è continua?
Svolgimento.
Si ha che

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{e^x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^+} x - a^2 + 2a = -a^2 + 2a = f(0)$$

quindi imponendo che

$$-a^2 + 2a = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1$$

in conclusione si ha che la funzione è continua nel suo dominio se $a = 1$.
Esercizio 3.
Determinare per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(x + b^2\right) & \text{se } x > 0 \\ \frac{1 - \cos(ax)}{\tan x^2} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua nel suo dominio.
Svolgimento.

Il punto per cui si studia la continuità è l'origine, in tutti gli altri punti la funzione è continua. Quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(ax)}{\tan x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(ax)}{a^2x^2} \cdot \frac{a^2x^2}{\tan x^2} = \frac{a^2}{2}$$

Si ha che $f(0) = 1$, quindi la prima condizione da imporre è

$$a^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \pm\sqrt{2}$$

Poi si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \log\left(x + b^2\right) = \log\left(b^2\right)$$

quindi la seconda condizione da imporre è

$$\log\left(b^2\right) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad b = \pm\sqrt{e}$$

In conclusione si è trovato che la funzione è continua nell'origine se e solo se $(a, b) = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{e})$ con tutte le scelte possibili dei segni.

Esercizio 4.

Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x_0 = 0$

Svolgimento.

Per studiare la derivabilità di f nell'origine, si usa la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x \cos\frac{1}{x} = 0$$

avendo trovato che esiste finito il limite del rapporto incrementale possiamo concludere che $f(x)$ è derivabile nell'origine.

Esercizio 5.

Determinare i punti di non derivabilità

$$f(x) = \cos\sqrt{|x|}$$

Svolgimento.

Per risolvere il seguente esercizio ricorriamo al seguente

Teorema. *Sia f una funzione continua in x_0 e derivabile in tutti i punti $x \neq x_0$ di un intorno x_0. Se esiste finito il limite per $x \to x_0$ della funzione f'(x), allora f è derivabile anche in x_0 e si ha*

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

Il dominio di $f(x)$ è tutto $\mathbb{R}$, inoltre $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ in quanto composizione di funzioni continue. Riscriviamo $f(x)$ ne seguente modo

$$f(x) = \cos\sqrt{|x|} = \begin{cases} \cos\sqrt{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \cos\sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Dobbiamo verificare che le derivate dx e sx coincidano, quindi

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin\sqrt{-x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

Essendo le due derivate laterali diverse, possiamo concludere che $f(x)$ non è derivabile nell'origine. Possiamo inoltre dire che l'origine è un punto angoloso.

Se invece avessimo applicato la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale si sarebbe ottenuto lo stesso risultato infatti si ha $f(0) = 1$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{|x|} - 1}{\operatorname{sign}(x)\,(\sqrt{|x|})^2} = -1/2,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos\sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{|x|} - 1}{\operatorname{sign}(x)\,(\sqrt{|x|})^2} = +1/2,$$

il che concorda con il risultato precedentemente trovato. Si conclude che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sqrt{|x|} - 1}{x}$$

non esiste, quindi la funzione non è derivabile in 0.

Esercizio 6.

Determinare la derivata di

$$f(x) = \arcsin x$$

Svolgimento.

1° modo: Calcolo di $f'(x)$ tramite la derivata della funzione inversa. In base al teorema sappiamo che $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1})(y)}$.

Poniamo

$$x = g(y) = \sin y$$

la cui derivata è

$$g'(y) = \cos y$$

mentre l'inversa è

$$y = g^{-1}(x) = \arcsin x$$

quindi
$$\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
2° modo: Calcolo di $f'(x)$ tramite regola derivazione funzione composta. Sappiamo che
$$g(\arcsin x) = \sin(\arcsin x) = x$$
quindi andando a derivare l'espressione precedente
$$g'(\arcsin x) = 1$$
ma allora
$$D\ g(\arcsin x) = g'(\arcsin x) \cdot \arcsin' x = \cos(\arcsin x) \cdot \arcsin' x = 1$$
da cui si ricava che
$$\arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
Esercizio 7.
Determinare la derivata di
$$f(x) = \frac{3x^2+1}{2x-3}$$

Svolgimento.
In base alla regola di derivazione del quoziente
$$f'(x) = \frac{6x(2x-3)-(3x^2+1)2}{(2x-3)^2} = \frac{6x^2-18x-2}{(2x-3)^2}$$
Esercizio 8.
Determinare la derivata di
$$f(x) = \sqrt{3-x^2}$$

Svolgimento.
In base alla regola di derivazione delle funzioni composte
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{3-x^2}}$$
Esercizio 9.
Determinare la derivata di
$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Svolgimento.
Riscriviamo $f(x)$ nel seguente modo
$$f(x) = \mathrm{e}^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

quindi

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{e}^{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} \cdot \left[1 \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] \\
&= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left[\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right]
\end{aligned}
$$

Esercizio 10.
Determinare la derivata di

$$
f(x) = \cos\left[\left(x^3+x^4\right)^5\right]
$$

Svolgimento.
Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte

$$
f'(x) = -\sin\left[\left(x^3+x^4\right)^5\right] \cdot 5\left(x^3+x^4\right)^4 \cdot \left(3x^2+4x^3\right)
$$

13 Esercitazione del 15-12-2010

Esercizio 1.
Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 7}$$

Svolgimento.
1) Dominio
Siccome abbiamo una funzione fratta, il denominatore non può mai essere nullo, quindi deve essere che

$$2x + 7 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \neq -\frac{7}{2}$$

quindi

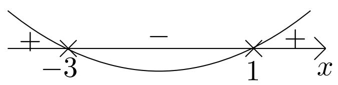
$$\text{dom}\, f(x) = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \neq -\frac{7}{2} \right\}$$

2) Segno
Studiamo il segno del numeratore

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -1 \pm 2 = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

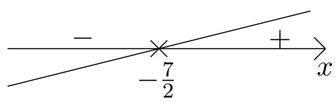
quindi

$x^2 + 2x - 3$



per quanto riguarda il denominatore

$2x + 7$



passando al riquadro si ottiene

x		$-\frac{7}{2}$		-3		1	
x^2+2x-3	$+$		$+$	$\times$	$-$	$\times$	$+$
$2x+7$	$-$	$\times$	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$+$	$\times$	$-$	$\times$	$+$

3) Limiti: I limiti vanno calcolati dove non esiste la funzione e agli estremi del dominio, quindi si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\frac{7}{2}^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\frac{7}{2}^+} f(x) = +\infty$$

4) Asintoti: Per $x = -\frac{7}{2}$ si ha un asintoto verticalee i due limiti dx e sx escludono la presenza di massimi e minimi assoluti. Proviamo a cercare gli asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-3}{2x^2+7x} = \frac{1}{2}$$

mentre

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+2x-3}{2x+7} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x-6}{4x+14} = -\frac{3}{4}$$

quindi la retta di equazione $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ è un asintoto obliquo per la funzione sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

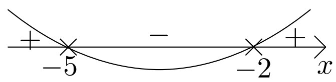
5) Derivabilità: La derivata è

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(2x+7) - \left(x^2+2x-3\right)2}{(2x+7)^2} = \frac{2\left(x^2+7x+10\right)}{(2x+7)^2}$$

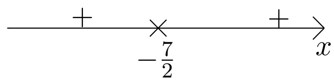
Passiamo allo studio del segno della derivata prima. Consideriamo il numeratore

$$x^2+7x+10 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-7\pm 3}{2} = \begin{cases} -5 \\ -2 \end{cases}$$

quindi

$x^2+7x+10$ 

per quanto riguarda il denominatore

$(2x+7)^2$ 

passando al riquadro si ottiene

x		-5		$-\frac{7}{2}$		-2	
2	$+$		$+$		$+$		$+$
$x^2+7x+10$	$+$	$\times$	$-$		$-$	$\times$	$+$
$(2x+7)^2$	$+$		$+$	$\times$	$+$		$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$	$\bullet$	$\searrow$	$\times$	$\nearrow$

si è così trovato che $x = -5$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = -2$ è un punto di minimo relativo.
6) Derivata seconda:

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{(2x+7)\,(2x+7)^2 - \left(x^2+7x+10\right) \cdot 2\,(2x+7) \cdot 2}{(2x+7)^4} = \frac{18}{(2x+7)^3}$$

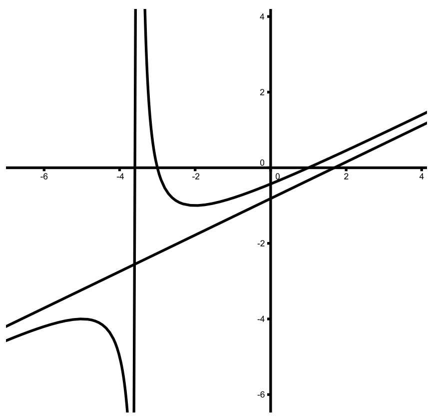
Studiamo il segno della derivata seconda. I numeratore è sempre positivo mentre per quanto riguarda il denominatore

$(2x+7)^3$	$-$	$\times$ $-\frac{7}{2}$	$+$	x

passando il riquadro si ottiene

x		$-\frac{7}{2}$	
18	$+$		$+$
$(2x+7)^3$	$-$		$+$
$f''(x)$	$\cap$	$\times$	$\cup$

non ci sono punti di flesso. Per $x > -7/2$ la funzione è convessa, mentre per $x < -7/2$ la funzione è concava.
Il grafico è



Esercizio 2.
Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}$$

Svolgimento.
1) Dominio
Siccome abbiamo una funzione fratta, il denominatore non può mai essere nullo, quindi deve essere che

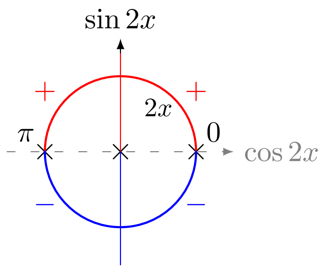
$$1 + \sin x \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}$$

quindi

$$\mathrm{D} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

f(x) è una funzione periodica di periodo 2π, quindi ci limitiamo allo studio nell'intervallo $[0, 2\pi)$
2) Segno
Consideriamo il numeratore

$\sin 2x$

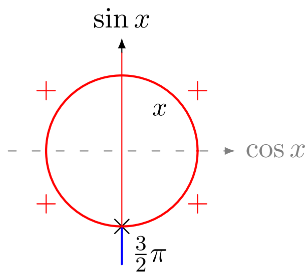


quindi il numeratore è non negativo quando $0 + 2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi$, cioè quando $k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Per trovare tutti i valori nell'intervallo studiato dobbiamo porre $k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$, quindi

$$k = 0 \ \Rightarrow \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \qquad k = 1 \ \Rightarrow \ \pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi, \qquad k = 2 \ \Rightarrow \ 2\pi \leq x \leq \frac{5}{2}\pi$$

per quanto riguarda il denominatore

$1 + \sin x$



passando al riquadro si ottiene

	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$		2π
$\sin 2x$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$1+\sin x$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	

3) Limiti
L'unico limite che si calcola è quello dove non esiste la funzione

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^-} \frac{\sin 2x}{1+\sin x} \overset{H}{=} \lim_{n\to\frac{3}{2}\pi^-} \frac{2\cos 2x}{\cos x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^+} \frac{\sin 2x}{1+\sin x} \overset{H}{=} \lim_{n\to\frac{3}{2}\pi^+} \frac{2\cos 2x}{\cos x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

4) Asintoti
Per $x = \frac{3}{2}\pi$ si ha un asintoto verticale e i due limiti dx e sx escludono la presenza di massimi e minimi assoluti.
5) Derivabilità
Calcoliamo la derivata prima

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos 2x \cdot 2 \cdot (1+\sin x) - \overbrace{\sin 2x}^{2\sin x\cos x} \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{2\left(1-\sin^2 x\right)(1+\sin x) - 2\sin x \cdot \left(1-\sin^2 x\right)}{(1+\sin x)^2} \\ &= 2\frac{1+\sin x - 2\sin^2 x - 2\sin^3 x - \sin x + \sin^3 x}{(1+\sin x)^2} \\ &= 2\frac{1-2\sin^2 x - \sin^3 x}{(1+\sin x)^2} \end{aligned}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

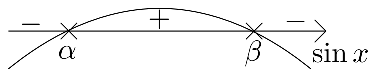
$$\begin{aligned} 1-2\sin^2 x - \sin^3 x &= 1-\sin^2 x - \sin^2 x - \sin^3 x \\ &= (1+\sin x)(1-\sin x) - \sin^2 x(1+\sin x) \\ &= (1+\sin x)(1-\sin x-\sin^2 x) \end{aligned}$$

$$= \frac{2(1-\sin x - \sin^2 x)}{1+\sin x}$$

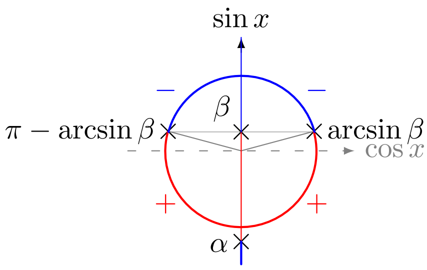
è definita per tutto l'insieme di definizione della funzione. Per quanto riguarda il segno dobbiamo studiare solo il numeratore in quanto il denominatore è stato già studiato. Si ha

$$1-\sin x-\sin^2 x=0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{-2}=\begin{cases}\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=\alpha\\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\beta\end{cases}$$

quindi

$1-\sin x-\sin^2 x$ 

passando alla circonferenza trigonometrica



si noti che il valore α non porta a nessuna soluzione in quanto è minore di -1 (la funzione arcoseno è definita solo per valori compresi tra -1 e 1). In definitiva

x	0		$\arcsin\beta$		$\pi-\arcsin\beta$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
$1-\sin x-\sin^2 x$		$+$	$\times$	$-$	$\times$	$+$	$\times$	$+$	
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\bullet$	$\nearrow$	

Si ha un punto di massimo relativo per $x=\arcsin\beta$, mentre un punto di minimo relativo per $x=\pi-\arcsin\beta$.

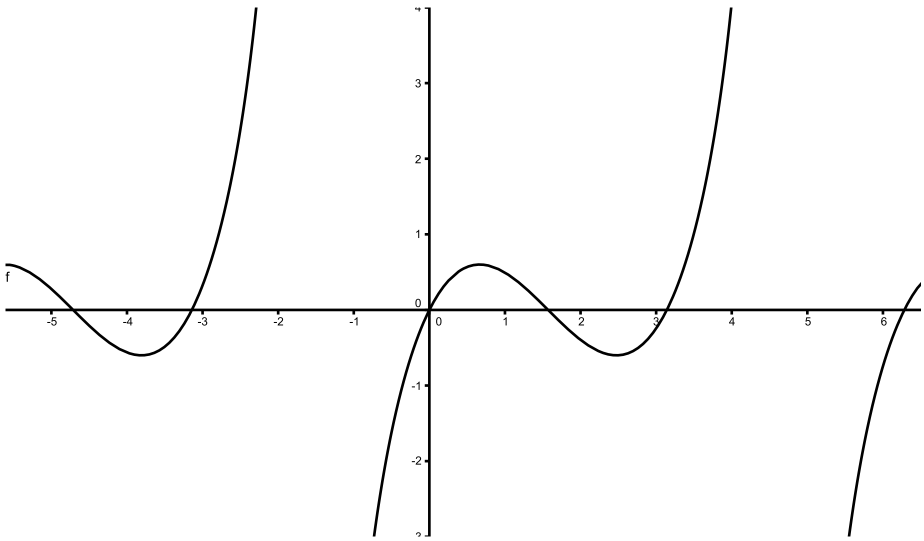
7) derivata seconda

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2\cdot\frac{(-\cos x-2\sin x\cdot\cos x)(1+\sin x)-\left(1-\sin x-\sin^2 x\right)\cos x}{(1+\sin x)^2}\\
&=-2\cdot\frac{\cos x\,(1+2\sin x)(1+\sin x)+\left(1-\sin x-\sin^2 x\right)\cos x}{(1+\sin x)^2}\\
&=\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}\left[2+2\sin x+\sin^2 x\right]
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il segno abbiamo la seguente tabella

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{2}\pi$		2π
-2		$-$		$-$		$-$	
$\cos x$		$+$		$-$		$+$	
$(1+\sin x)^2$		$+$		$+$		$+$	
$2+2\sin x+\sin^2 x$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

in $x = \pi/2$ si ha un punto di flesso. In $0 < x < \pi/2$ e $3/2\pi < x < 2\pi$ si ha concavità verso il basso, mentre in $\pi/2 < x < 3/2\pi$ si ha concavità verso l'alto. Il grafico è



14 Esercitazione del 16-12-2010

Esercizio 1.
Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x \leq 0 \\ x\,|\log x|^{1/3} & \text{se } 0 < x < 1/e \\ \left(2x + e^{-1}\right)/3 & \text{se } x \geq 1/e \end{cases}$$

Svolgimento.
Si tratta di una funzione definita per casi il cui dominio è tutto $\mathbb{R}$.
1) Segno
Per quanto riguarda il segno $f(x)$ è sempre positiva su tutto il dominio tranne che nell'origine dove si annulla.
2) Continuità
Si deve studiare la continuità nei punti di raccordo, quindi

$$\lim_{x\to 0^+} x\,|\log x|^{1/3} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} \sqrt{|x|} = 0 \qquad \lim_{x\to 1/e^-} x\,|\log x|^{1/3} = 1/e \qquad \lim_{x\to 1/e^+} \left(2x + e^{-1}\right)/3 = 1/e$$

quindi $f(x)$ è continua su tutto il dominio.
2) Limiti

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{|x|} = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(2x + e^{-1}\right)/3 = +\infty$$

3) Asintoti
Dal testo si riesce a capire che la retta di equazione $y = \left(2x + e^{-1}\right)/3$ è un asintoto obliquo.
4) Derivabilità
Bisogna studiare se $f(x)$ è derivabile nei punti di raccordo. Studiamo se $f(x)$ è derivabile nell'origine, quindi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{|x|} - 0}{x} = -\infty$$

Non esistendo il limite del rapporto incrementale possiamo concludere che $f(x)$ non è derivabile nell'origine.
Quando $x < 0$ la derivata è pari a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$$

Quando $0 < x < 1/e$ la derivata è

$$f'(x) = -\sqrt[3]{\log x} - x \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\log^2 x}} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{3\log x + 1}{3\sqrt[3]{\log^2 x}}$$

Quando $x > 1/e$ la derivata è

$$f'(x) = \frac{2}{3}$$

Consideriamo ora il punto $x = 1/e$ e studiamo la derivabilità in questo punto. Si ha che

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^-} f'(x) = -\frac{-3+1}{3} = \frac{2}{3}$$

mentre

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} f'(x) = \frac{2}{3}$$

quindi possiamo concludere che $f(x)$ è derivabile per $x = 1/e$.
5) Segno derivata prima
Quando $x < 0$ si ha che la derivata e sempre negativa, quindi in questo intervallo $f(x)$ è sempre strettamente decrescente. Quando $0 < x < 1/e$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log x < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x < e^{-1/3}$$

Essendo $e^{-1} < e^{-1/3}$ f(x) è sempre strettamente crescente in questo intervallo. Quando $x > 1/e$ la derivata è sempre positiva, quindi $f(x)$ è sempre strettamente crescente nell'intervallo dato. Dato che 0 appartiene al dominio, si ha che esso è punto di minimo relativo e assoluto di f (anche se ivi f non è differenziabile).
6) Derivata seconda
Quando $x \leq 0$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)^{-3/2}(-1) = -\frac{1}{4\sqrt{-x^3}}$$

essendo la derivata seconda sempre negativa in questo intervallo si ha una concavità rivolta verso il basso.
Quando $x \leq 0$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{\frac{3}{x} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\log^2 x} - (3\log x + 1) \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \log x^{-1/3} \cdot \frac{1}{x}}{9\left(\sqrt[3]{\log^2 x}\right)^2} \\
&= -\frac{\frac{9\sqrt[3]{\log^2 x}}{x} - \frac{2(3\log x + 1)}{x \log x^{1/3}}}{9\left(\sqrt[3]{\log^2 x}\right)^2} \\
&= \frac{9\log x - 6\log x - 2}{9x\log x\left(\sqrt[3]{\log^2 x}\right)^2} \\
&= \frac{2 - 3\log x}{9x\log x\left(\sqrt[3]{\log^2 x}\right)^2}
\end{aligned}$$

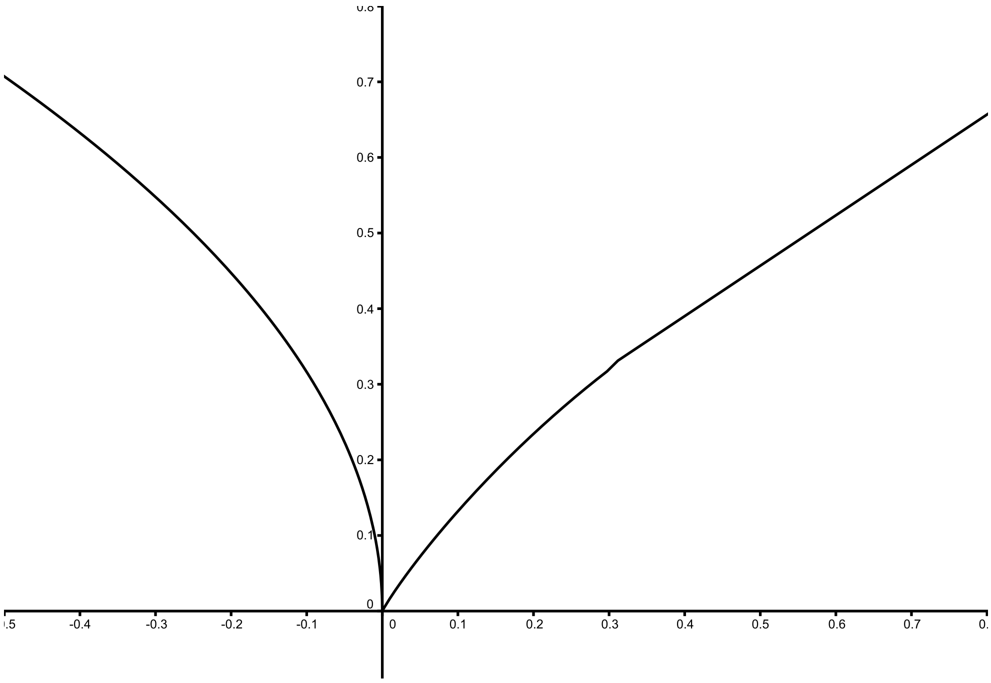
Per quanto riguarda lo studio del segno consideriamo il fattore $2 - 3\log x$

$$2 - 3\log x > 0 \Leftrightarrow \log x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x < e^{\frac{2}{3}}$$

ma essendo $e^{\frac{2}{3}} > e^{-1}$ si ha che nell'intervallo dato il fattore $2 - 3\log x$ assume sempre valore positivo. Andando a considerare la tabella si ha

x	0		e^{-1}		1		$e^{2/3}$	
$2 - 3\log x$		$+$		$+$		$+$	$\times$	$-$
$9x$	$\times$	$+$		$+$		$+$		$+$
$\log x$		$-$		$-$	$\times$	$+$		$+$
$\sqrt[3]{\log^2 x}$		$+$		$+$	$\times$	$+$		$+$
$f''(x)$		$\cap$						

quindi nell'intervallo in considerazione $f''(x)$ è sempre negativa, quindi la funzione ha una concavità rivolta verso il basso. Mentre quando $x > 1/e$ si ha che $f''(x) = 0$. Il grafico è



15 Esercitazione del 19-1-2011

Esercizio 1.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

Svolgimento.
Ricordando la formula di duplicazione del seno[1], si ha che

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

quindi andando a sostituire

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

a denominatore dividiamo e moltiplichiamo per $\cos x$

$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

andando ad osservare la funzione integranda, notiamo che nella sua espressione c'è una funzione, $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ e la sua derivata, $1/\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Abbiamo il seguente differenziale

$$d(\tan\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$$

si ha che

$$\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\,d(\tan\frac{x}{2}) = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \mathrm{c}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $\int 1/t\,dt = \log|t| + c$.
Esercizio 2.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \cos^2 x\,dx$$

Svolgimento.
Usando la seguente identità, ricavata dalle formule di bisezione del coseno[2],

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

[1] $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$
[2] $\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{(1-\cos(\alpha))/2}$

si ha

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1+\cos\,(2x)}{2}\, dx \\ &\quad \text{rompiamo l'integrale nella somma di due integrali per la linearità} \\ &= \int \frac{1}{2}\, dx + \int \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{2}\, d\,(2x) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin\,(2x) + \mathrm{c}\end{aligned}$$

Si sarebbe potuto risolvere anche per parti, infatti

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx$$

calcoliamo a parte l'ultimo integrale

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\, dx = x - \int \cos^2 x \, dx$$

dunque rimettendo tutto assieme

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx$$

da cui si ricava

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x + c$$

quindi

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cdot \cos x}{2} + \frac{x}{2} + c$$

Esercizio 3.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \sin^3 x \, dx$$

Svolgimento.
Usando l'identità

$$\sin^3 x = \sin x \left(1 - \cos^2 x\right)$$

si ottiene

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \left(1 - \cos^2 x\right)\, dx = \int \sin x \, dx + \int - \sin x \cos^2 x \, dx$$

il secondo integrale lo si risolve andando ad usare il metodo per sostituzione. Si pone

$$t = \cos x \qquad \Rightarrow \qquad dt = -\sin x \, dx$$

allora

$$\int -\sin x \cos^2 x \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + \mathrm{c} = \frac{\cos^3 x}{3} + \mathrm{c}$$

riconsiderando il tutto

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \, dx + \int -\sin x \cos^2 x \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + \mathrm{c}$$

Esercizio 4.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{x}{\cos^2 (3x^2+5)} \, dx$$

Svolgimento.
Per risolvere questo integrale si ricorre alla tabella degli integrali immediati dopo aver apportato gli opportuni cambiamenti. Quello che si deve cercare è che nell'espressione dell'integranda ci sia la derivata di qualche funzione già presente nell'espressione stessa. Si nota infatti che

$$d\left(3x^2+5\right) = 6x \, dx$$

quindi dobbiamo moltiplicare e dividere per 6

$$\int \frac{x}{\cos^2 (3x^2+5)} \, dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{\cos^2 (3x^2+5)} \, dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\cos^2 (3x^2+5)} d\left(3x^2+5\right) =$$
$$= \frac{1}{6} \tan\left(3x^2+5\right) + \mathrm{c}$$

Esercizio 5.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} \, dx$$

Svolgimento.
Stesso ragionamento dell'esercizio precedente. Proviamo a calcolare il seguente differenziale

$$d\left(x^2+5\right) = 2x \, dx$$

nella funzione integranda la x è già presente, dobbiamo aggiungere un 2, quindi

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{(x^2+5)^{3/2}} = \frac{1}{2} \int \left(x^2+5\right)^{-3/2} \, d\left(x^2+5\right) = \frac{1}{2} \frac{\left(x^2+5\right)^{-1/2}}{-1/2} + \mathrm{c}$$

quindi

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} \, dx = \frac{-1}{\sqrt{x^2+5}} + \mathrm{c}$$

Esercizio 6.
Si calcoli il seguente integrale
$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$$

Svolgimento.
Andiamo ad usare il metodo per sostituzione. Poniamo
$$y = \sqrt{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad x = y^2 - 1 \quad \text{ mentre } \quad dx = 2y\, dy$$
andando a sostituire
$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx = \int \frac{y^2-1}{y} 2y\, dy = 2\,\frac{y^3}{3} - 2y + \mathrm{c} = 2\frac{(x+1)^{3/2}}{3} - 2\sqrt{x+1} + \mathrm{c}$$

Esercizio 7.
Si calcoli il seguente integrale
$$\int \mathrm{e}^{3x} \cos x\, dx$$

Svolgimento.
Andiamo a risolvere il seguente integrale per parti
$$\int \mathrm{e}^{3x} \cos x\, dx = \sin x \cdot \mathrm{e}^{3x} - \int \sin x \cdot 3\mathrm{e}^{3x}\, dx$$
calcoliamo l'ultimo integrale per parti
$$\int \sin x\, \mathrm{e}^{3x}\, dx = -\cos x \cdot \mathrm{e}^{3x} + \int \cos x \cdot 3\mathrm{e}^{3x}\, dx = -\mathrm{e}^{3x} \cos x + 3 \int \cos x \cdot \mathrm{e}^{3x}\, dx$$
quindi ricompattando il tutto
$$\int \mathrm{e}^{3x} \cos x\, dx = \sin x \cdot \mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{3x} \cos x - 9 \int \cos x \mathrm{e}^{3x}\, dx$$
da cui si ricava che
$$10 \int \mathrm{e}^{3x} \cos x\, dx = \sin x \cdot \mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{3x} \cos x$$
quindi
$$\int \mathrm{e}^{3x} \cos x\, dx = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{10} (\sin x + 3 \cos x) + \mathrm{c}$$

Esercizio 8.
Si calcoli il seguente integrale
$$\int x \sin x\, dx$$

Svolgimento.

Andiamo a risolvere il seguente integrale per parti. Decido di integrare il seno e di derivare il polinomio, questo perché ogni volta che derivo un polinomio il suo grado diminuisce fino ad ottenere una costante. In questo modo l'integrale che si ottiene ha un'espressione più semplice rispetto quella di partenza. Si ha

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + \mathrm{c}$$

Esercizio 9.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int 2x \log(x-5) \, dx$$

Svolgimento.
Consideriamo la seguente manipolazione, per evitare la divisione tra polinomi, che mi servirà nel calcolo dell'integrale

$$\frac{x^2}{x-5} = \frac{x^2-25+25}{x-5} = \frac{x^2-25}{x-5} + \frac{25}{x-5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} + \frac{25}{x-5} = x+5+\frac{25}{x-5}$$

Andiamo a calcolare l'integrale per parti. Siccome l'integrale *immediato* del logaritmo non esiste[3], in questo caso si è costretti ad andare ad integrare il polinomio e derivare il logaritmo, quindi

$$\begin{aligned}
\int 2x \log(x-5) \, dx &= x^2 \log(x-5) - \int \frac{x^2}{x-5} \, dx \\
&= x^2 \log(x-5) - \int \left(x+5+\frac{25}{x-5} \right) dx \\
&\qquad \text{per la proprietà di linearità dell'integrale} \\
&= x^2 \log(x-5) - \int x \, dx + \int 5 \, dx + \int \frac{25}{x-5} \, dx \\
&\qquad \text{nell'ultimo integrale si ha che dx=d(x-5) per le proprietà del differenziale} \\
&= x^2 \log(x-5) - \frac{x^2}{2} - 5x - 25 \log|x-5| + \mathrm{c}
\end{aligned}$$

la funzione integranda è definita solo per $x > 5$, quindi $|x-5| = x-5$, in conclusione si ha che

$$\int 2x \log(x-5) \, dx = x^2 \log(x-5) - \frac{x^2}{2} - 5x - 25 \log(x-5) + \mathrm{c}$$

Esercizio 10.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int (x+1)^2 \cos x \, dx$$

[3] tuttavia il logaritmo ammette primitiva, infatti integrando per parti $\int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}$,

Svolgimento.
Andiamo a risolverlo per parti applicando la regola due volte dove, in entrambe, si sceglie di derivare il polinomio ed integrare l'altra funzione

$$
\begin{aligned}
\int (x+1)^2 \cos x \, dx &= \sin x \cdot (x+1)^2 - \int \sin x \cdot 2\,(x+1)\; dx \\
&\qquad \text{2 è una costante e posso portarla fuori dall'integrale} \\
&= (x+1)^2 \sin x - 2 \left[-(x+1)\cos x + \int \cos x \, dx \right] \\
&= (x+1)^2 \sin x + 2\,(x+1)\cos x - 2 \sin x + c
\end{aligned}
$$

16 Esercitazione del 20-1-2011

Esercizio 1.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{2}{x^2-5x+6}\,dx$$

Svolgimento.
Notiamo che la funzione integranda è una funzione fratta e siccome il grado del numeratore è inferiore rispetto al grado del denominatore è possibile decomporre la frazione nella somma di più frazioni, dette fratte semplici. Consideriamo il denominatore e lo scomponiamo in fattori

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

Abbiamo ottenuto due fattori di 1° grado, quindi la funzione integranda si decompone nel seguente modo

$$\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$$

affinché la prima e l'ultima frazione siano uguali, deve essere che

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -(3A+2B)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x^2-5x+6}\,dx &= \int \left(\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{x-3}\right)dx \\
&\quad \text{per la proprietà di linearità dell'integrale} \\
&= \int \frac{-2}{x-2}\,dx+\int \frac{2}{x-3}\,dx \\
&\quad \text{per le proprietà del differenziale} \\
&= \int \frac{-2}{x-2}\,d(x-2)+\int \frac{2}{x-3}\,d(x-3) \\
&\quad \text{poiché sono degli integrali immediati} \\
&= -2\log|x-2|+2\log|x-3|+\mathrm{c} \\
&= 2\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+\mathrm{c}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\,dx$$

Svolgimento.

Si fa lo stesso ragionamento dell'esercizio precedente. Consideriamo il denominatore e lo scomponiamo in fattori

$$x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

quindi la funzione integranda si decompone nel seguente modo

$$\frac{3x-4}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{(A+B)x-(2A+3B)}{(x-3)(x-2)}$$

affinché la prima e l'ultima frazione siano uguali, deve essere che

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -(2A+3B)=4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=13 \\ B=-10 \end{cases}$$

quindi

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{13}{x-3}\,dx - \int \frac{10}{x-2}\,dx = 13\log|x-3| - 10\log|x-2| + \mathrm{c}$$

Esercizio 3.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4}\,dx$$

Svolgimento.
Consideriamo il denominatore e lo scomponiamo in fattori

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

Abbiamo ottenuto un fattore di primo grado con ordine di molteplicità 2, quindi la funzione integranda si decompone nel seguente modo

$$\frac{2x+3}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2} = \frac{Ax+(B-2A)}{(x-2)^2}$$

affinché la prima e l'ultima frazione siano uguali, deve essere che

$$\begin{cases} A=2 \\ B-2A=3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A=2 \\ B=7 \end{cases}$$

quindi

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4}\,dx = \int \frac{2}{x-2} - \int \frac{7}{(x-2)^2}\,dx = 2\log|x-2| - \frac{7}{x-2} + \mathrm{c}$$

Esercizio 4.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

Svolgimento.
In questo caso il denominatore non è scomponibile in fattori, ma lo si può riscrivere nel seguente modo

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,d(x+1) = \arctan(x+1) + \mathrm{c}$$

Esercizio 5.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{3x+6}{x^2+2x+2}\,dx$$

Svolgimento.
Come nell'esercizio precedente, il denominatore non è scomponibile in fattori, quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+6}{x^2+2x+2}\,dx &= 3\int \frac{x+2}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&\quad x+2 = x+1+1 = \frac{2(x+1+1)}{2} = \frac{2(x+1)+2}{2} \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)+2}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&\quad \text{rompendo la frazione} \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{2}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&\quad \text{nel primo integrale a numeratore si ha la derivata del denominatore} \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,d\left[(x+1)^2+1\right] + \frac{3}{2}\int \frac{2}{(x+1)^2+1}\,dx \\
&= \frac{3}{2}\log\left(x^2+2x+2\right) + 3\arctan(x+1) + \mathrm{c}
\end{aligned}$$

Esercizio 5.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{2x^2-3x+7}{x-5}\,dx$$

Svolgimento.
Siccome il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore si può procedere con la divisione tra polinomi[4].

[4] Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, si prende l'esponente di grado massimo di $A(x)$ e lo si divide per l'esponente di grado massimo di $B(x)$. Si calcola in resto $R(x)$ andando a moltiplicare il quoziente $Q(x)$ ottenuto per il divisore $B(x)$ e cambiando segno a ciascun termine. Infine si somma il polinomio $A(x)$ con il resto ottenuto. Si procede con l'algoritmo fino a quando il grado del resto è minore del grado del divisore. Infine si ha che $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Quindi

$$\begin{array}{ccc|cc} 2x^2 & -3x & +7 & x & -5 \\ \cline{4-5} -2x^2 & +10x & & 2x & +7 \\ \cline{1-3} // & 7x & +7 & & \\ & -7x & +35 & & \\ \cline{2-3} & // & 42 & & \end{array}$$

quindi abbiamo ottenuto che

$$\frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 5} = 2x + 7 + \frac{42}{x - 5}$$

Dunque

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 5}\, dx = \int \left(2x + 7 + \frac{42}{x - 5}\right) dx = x^2 + 7x + 42 \log|x - 5| + \mathrm{c}$$

Esercizio 6.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}\, dx$$

Svolgimento.
Siccome il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore si può procedere con la divisione tra polinomi. Quindi

$$\begin{array}{c|l} x^5 - 3x^4 + x + 3 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 & x^3 - 3x^2 + x - 3 \\ \hline // -3x^4 + x^3 + x + 3 & \\ 3x^4 - 3x^2 & \\ \hline // \; x^3 - 3x^2 + x + 3 & \\ -x^3 + x & \\ \hline // -3x^2 + 2x + 3 & \\ 3x^2 - 3 & \\ \hline // \; 2x & \end{array}$$

quindi

$$\frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} = x^3 - 3x^2 + x - 3 + \frac{2x}{x^2 - 1}$$

pertanto

$$\int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}\, dx = \int \left(x^3 - 3x^2 + x - 3 + \frac{2x}{x^2 - 1} \right) dx =$$
$$= \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + \log\left|x^2 - 1\right| + \mathrm{c}$$

17 Esercitazione del 26-1-2011

Esercizio 1.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\, dx$$

Svolgimento.
Operiamo il seguente cambio di variabili

$$\mathrm{e}^{2x}+1=y^2 \qquad \Rightarrow \qquad 2\mathrm{e}^{2x}dx=2ydy \qquad \text{da cui} \qquad dx=\frac{y}{y^2-1}dy$$

quindi

$$\int \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\, dx=\int \frac{y^2}{y^2-1}dy=\int \frac{y^2-1+1}{y^2-1}dy=\int dy+\int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\, dy$$

ora andiamo a decomporre la frazione dell'ultimo integrale in fratte semplici

$$\frac{1}{(y-1)(y+1)}=\frac{A}{y-1}+\frac{B}{y+1}=\frac{(A+B)y+A-B}{(y-1)(y+1)}$$

imponendo l'uguaglianza tra polinomi

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\, dx &= y+\int \frac{1}{2(y-1)}\, dy+\int \frac{-1}{2(1+y)}\, dy \\ &= y+\int \frac{1}{2(y-1)}\, d(y-1)+\int \frac{-1}{2(1+y)}\, d(y+1) \\ &= y+\frac{1}{2}\log|y-1|-\frac{1}{2}\log|y+1|+c \\ &= \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1}\right) \end{aligned}$$

Esercizio 2.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_1^3 \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\, dx$$

Svolgimento.
Andiamo ad eseguire la divisione tra polinomi

$$
\begin{array}{r|l}
x^5 - x + 1 & x^4 + x^2 \\ \cline{2-2}
-x^5 - x^3 & \quad x \\ \cline{1-1}
// \; -x^3 - x + 1 &
\end{array}
$$

quindi

$$\frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} = x + \frac{-x^3 - x + 1}{x^4 + 2}$$

dunque

$$\int_1^3 \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2}\, dx = \int_1^3 x\, dx + \int_1^3 \frac{-x^3 - x + 1}{x^4 + 2}\, dx$$

ora andiamo a decomporre la frazione dell'ultimo integrale in fratte semplici

$$\frac{-x^3 - x + 1}{x^4 + 2} = \frac{-x^3 - x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} = \frac{(A + C)x^3 + (B + D)x^3 + Ax + B}{x^2(x^2 + 1)}$$

andando ad eguagliare

$$\begin{cases} A + C = -1 \\ B + D = 0 \\ A = -1 \\ B = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 0 \\ D = -1 \end{cases}$$

dunque

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2}\, dx &= \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 + \int_1^3 \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 + \left[-\log|x| - \frac{1}{x} - \arctan x \right]_1^3 \\
&= 4 + \left(-\log 3 - \frac{1}{3} - \arctan 3 + 1 + \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \frac{14}{3} + \frac{\pi}{4} - \log 3 - \arctan 3
\end{aligned}$$

Esercizio 3.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-1}^1 \frac{3\mathrm{e}^x}{1 + \mathrm{e}^{2x}}\, dx$$

Svolgimento.
Risolviamo il seguente integrale con il metodo per sostituzione. Poniamo

$$y = \mathrm{e}^x \qquad \Rightarrow \qquad dy = \mathrm{e}^x dx$$

Quando eseguiamo un cambio di variabile nell'intregrale definito si deve fare attenzione ad andare ad aggiustare gli estremi di integrazione. Perciò si ha che quando

$$\begin{aligned} x = -1 \quad &\Rightarrow \quad y = \mathrm{e}^{-1} \\ x = 1 \quad &\Rightarrow \quad y = \mathrm{e}^1 \end{aligned}$$

quindi

$$\int_{-1}^{1} \frac{3\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,dx = \int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}^1} \frac{3y}{1+y^2}\cdot\frac{dy}{y} = 3\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}^1} \frac{1}{1+y^2}dy =$$
$$= [3\arctan y]_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}^1} = 3\left[\arctan(\mathrm{e}) - \arctan\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right]$$

Esercizio 4.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Svolgimento.
Risolviamolo considerando la seguente sostituzione[5]

$$x = \sin t \qquad \Rightarrow \qquad dx = \cos t dt$$

per quanto riguarda gli estremi di integrazione, quando

$$x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad t = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$
$$x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \arcsin 0 = 0$$

quindi

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{0} \cos^2 t\,dt = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_{-\pi/2}^{0} = \frac{\pi}{4}$$

Si sarebbe potuto anche risolvere per parti, infatti

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-1}^{0} 1\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= x\cdot\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\cdot\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{-x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\cdot\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx
\end{aligned}$$

quindi

$$2\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx = x\cdot\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{0} + [\arcsin x]_{-1}^{0}$$

[5]si sarebbe potuto porre anche $x = cost$, ma ciò porta ad una risoluzione dell'integrale leggermente più laboriosa

da cui

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(0 - \arcsin(-1)\right) = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 5.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx$$

Svolgimento.
Risolviamolo per parti dove andiamo a derivare il polinomio ed integriamo il coseno

$$\int_0^{\pi} x \cos x \, dx = x \sin x|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0 - [-\cos x]_0^{\pi} = -2$$

Esercizio 6.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} |\sin x| \; dx$$

Svolgimento.
$f(x) = |\sin x|$ è una funzione periodica di periodo π, quindi per la proprietà di additività dell'integrale spezzo l'intervallo di integrazione $[0, 2\pi]$ in due sottointervalli $[0, \pi]$ e $[\pi, 2\pi]$ nei quali la primitiva assume lo stesso valore, quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\sin x| \; dx &= \int_0^{\pi} |\sin x| \; dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| \; dx \\
&= 2 \int_0^{\pi} |\sin x| \; dx \\
&\qquad \text{siccome } \sin x \geq 0 \, \forall x \in [0, \pi] \\
&= 2 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-2\cos x]_0^{\pi} = 4
\end{aligned}$$

18 Esercitazione del 27-1-2011

Esercizio 1.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx$$

Svolgimento.
Eseguiamo la seguente sostituzione

$$2x+1=t \qquad \Rightarrow \qquad dt=2dx$$

per quanto riguarda gli estremi di integrazione, quando

$$\begin{aligned} x=0 \qquad &\Rightarrow \qquad t=1 \\ x=2 \qquad &\Rightarrow \qquad t=5 \end{aligned}$$

quindi andando a sostituire e poi risolvendo per parti

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{\log t}{t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\log t\Big|_1^5 + \int_1^5 \frac{1}{t^2}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\log(5) + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^5\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\log(5) - \frac{1}{5} + 1\right) = \frac{4-\log 5}{10} \end{aligned}$$

Esercizio 2.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-1}^2 4\,|x-1|\,dx$$

Svolgimento.
Da uno studio del modulo si ha che

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ 1-x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

quindi possiamo spezzare l'intervallo $[-1,2]$ nei due sottointervalli $[-1,1]$ e $[1,2]$ poiché in essi la funzione integranda assume valori diversi, quindi

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2} 4\,|x-1|\;dx &= \int_{-1}^{1} 4\,(1-x)\;dx + \int_{1}^{2} 4\,(x-1)\;dx \\ &= \int_{-1}^{1} -4\,(1-x)\;d(1-x) + \int_{1}^{2} 4\,(x-1)\;d(x-1) \\ &= -4\left[\frac{(1-x)^2}{2}\right]_{-1}^{1} + 4\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]_{1}^{2} = 10\end{aligned}$$

Esercizio 3.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

Svolgimento.
Proviamo a rivolvere il seguente esercizio usando le formule parametriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad t = \tan\frac{x}{2}$$

per quanto riguarda gli estremi di integrazione

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Rightarrow \quad t = 0 \\ x = \pi/2 \quad &\Rightarrow \quad t = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+sinx}\,dx &= \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{2t}{(1+t)^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt \\ &= 4\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt\end{aligned}$$

la funzione integranda è una razionale fratta e quindi si decompone in fratte semplici, quindi

$$\begin{aligned}\frac{t}{(1+t)^2(1+t^2)} &= \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{Ct+D}{1+t^2} \\ &= \frac{A(1+t)(1+t^2) + B(1+t^2) + (Ct+D)(1+t^2)}{(1+t)^2(1+t^2)} \\ &= \frac{A + At + At^2 + At^3 + B + Bt^2 + Ct + 2Ct^2 + Ct^3 + D + 2Dt + Dt^2}{(1+t)^2(1+t^2)}\end{aligned}$$

quindi imponendo l'uguaglianza tra polinomi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B + 2C + D = 0 \\ A + C + 2D = 1 \\ A + B + D = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = 0 \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

quindi

$$4\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2(1+t^2)}\,dt = 4\left(-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) =$$

$$= 2\left(\left.\frac{1}{1+t}\right|_0^1 + \arctan t|_0^1\right) = 2\left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{\pi}{4} + 0\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

Proviamo ora a risolvere lo stesso esercizio nel seguente modo. Sarà meno laborioso.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 1 - 1}{1+\sin x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{1+\sin x}\right)dx =$$

$$= [x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \mathrm{I}$$

risolviamo I con le parametriche

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t)^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \left[-\frac{2}{1+t}\right]_0^1 = 1$$

quindi in definitiva

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

Esercizio 4.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\,dx$$

Svolgimento.
Per definizione di integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\,dx$$

è possibile svolgere separatamente l'integrale e poi calcolarne il limite, quindi

$$\int_1^t \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\,dx \quad =^{6} \quad \left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+5}}\right]_1^t = -\frac{1}{\sqrt{t^2+5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

ora passando al limite di ciò che si è ottenuto

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Esercizio 5.
Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

Svolgimento.
Per definizione di integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{t} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

andando a risolvere

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{t} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{t} \arctan x\, d(\arctan x)$$
$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan^2 x\right]_0^t = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\arctan^2 t - 0\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

Esercizio 6.
Calcolare l'area dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Svolgimento.
Si tratta dell'equazione dell'ellisse centrata nell'origine del piano cartesiano che taglia l'asse x in a e $-a$. Possiamo considerare solo il 1° quadrante e calcolare l'area della regione di piano compresa tra il ramo dell'ellisse e l'asse x. Andando ad esplicitare la variabile y ci ricaviamo la funzione da integrare

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Per trovare l'area dell'ellisse basta integrare da 0 ad a la funzione trovata e moltiplicare per 4, quindi

$$\mathrm{A} = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

[6] questo integrale è già stato risolto, si veda l'esercitazione del 19-1

Risolviamo l'integrale tramite il metodo di sostituzione. Poniamo

$$\frac{x}{a} = \sin t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{a} = \cos t dt$$

mentre

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

per quanto riguarda gli estremi di integrazione quando

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Rightarrow \quad t = 0 \\ x = a \quad &\Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \text{A} &= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\int_0^{\pi/2} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t\, dt = \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt \quad =^{7} \quad 4ab\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \pi ab \end{aligned}$$

Esiste un modo più facile per calcolare l'ultimo integrale, infatti si ha che

$$4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi ab.$$

Si è usato il fatto che $\cos^2 t$ è pari e periodica di periodo π, inoltre si ha, per periodicità di seno e coseno

$$2\pi = \int_0^{2\pi} 1\, dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t + \int_{-\pi/2}^{3/2\pi} \sin^2 t\, dt = 2\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt,$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \pi.$$

[7] fare riferimento all'esercizio 2 dell'esercitazione del 19-1