

# Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche  
Tiziano Villa

26 Settembre 2019

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	24	
problema 2	6	
totale	30	

1. Si considerino i due seguenti automi definiti sull'alfabeto  $E = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ .

Automa  $G$  (impianto):

- stati: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 con 0 stato iniziale e 8 unico stato accettante;
- transizione da 0 a 1:  $a_1$ ,  
transizione da 0 a 3:  $a_2$ ,  
transizione da 1 a 2:  $b_1$ ,  
transizione da 1 a 4:  $a_2$ ,  
transizione da 2 a 5:  $a_2$ ,  
transizione da 3 a 4:  $a_1$ ,  
transizione da 3 a 6:  $b_2$ ,  
transizione da 4 a 5:  $b_1$ ,  
transizione da 4 a 7:  $b_2$ ,  
transizione da 5 a 8:  $b_2$ ,  
transizione da 6 a 7:  $a_1$ ,  
transizione da 7 a 8:  $b_1$ .

Automa  $H_a$  (specifica):

- stati: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 con 0 stato iniziale e 8 unico stato accettante;
- transizione da 0 a 1:  $a_1$ ,  
transizione da 0 a 3:  $a_2$ ,  
transizione da 1 a 2:  $b_1$ ,  
transizione da 1 a 9:  $a_2$ ,  
transizione da 2 a 5:  $a_2$ ,  
transizione da 3 a 4:  $a_1$ ,  
transizione da 3 a 6:  $b_2$ ,  
transizione da 4 a 7:  $b_2$ ,  
transizione da 5 a 8:  $b_2$ ,  
transizione da 6 a 7:  $a_1$ ,  
transizione da 7 a 8:  $b_1$ ,  
transizione da 9 a 5:  $b_1$ .

(a) Si disegnino i grafi dei due automi.

- (b) Dati i linguaggi  $K$  e  $M = \overline{M}$  sull'alfabeto  $E$ . Siano  $E_c \subseteq E$  e  $E_o \subseteq E$ . Sia  $P$  la proiezione naturale da  $E^*$  a  $E_o^*$ .

Si scriva la definizione di osservabilit  di  $K$  rispetto a  $M$ ,  $E_c$  ed  $E_o$ .

Traccia di soluzione.

**Definizione** Siano  $K$  e  $M = \overline{M}$  linguaggi sull'alfabeto di eventi  $E$ . Sia  $E_c \subseteq E$  l'insieme degli eventi controllabili. Sia  $E_o \subseteq E$  l'insieme degli eventi osservabili con  $P$  la proiezione da  $E^*$  a  $E_o^*$ .

Si dice che  $K$    osservabile rispetto a  $M$ ,  $P$ ,  $E_c$ , se per tutte le stringhe  $s \in \overline{K}$  e per tutti gli eventi  $\sigma \in E_c$ ,

$$s\sigma \notin \overline{K} \wedge s\sigma \in M \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} \cap \overline{K} = \emptyset.$$

- (c) Siano  $M = \mathcal{L}(G)$  e  $K = \mathcal{L}_m(H_a)$ .

Siano  $E_{uo} = \{a_2\}$  e  $E_{uc} = \emptyset$ .

$K$    osservabile rispetto a  $M$ ,  $E_c$  ed  $E_o$  ? Lo si verifichi usando la definizione.

Traccia di soluzione.

Si ha  $\overline{K} = \overline{\{a_2b_2a_1b_1, a_2a_1b_2b_1, a_1b_1a_2b_2, a_1a_2b_1b_2\}}$ . Si consideri la stringa  $s = a_2a_1$  e  $\sigma = b_1$ , allora si ha che  $a_2a_1b_1 \notin \overline{K}$ , ma  $a_2a_1b_1 \in M$ ; inoltre  $P(s) = a_1$ ,  $P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} = \{a_2^*a_1a_2^*b_1\}$ , perci   $P^{-1}[P(s)]\{\sigma\} \cap \overline{K} = \{a_2^*a_1a_2^*b_1\} \cap \overline{K} = \{a_1a_2b_1\} \neq \emptyset$  il che falsifica la condizione di osservabilit .

Un altro controesempio speculare al precedente si ottiene con la stringa  $s = a_1a_2$  e  $\sigma = b_2$ . Ovviamente basta trovare un controesempio per stabilire che non vale l'osservabilit .

Intuitivamente, dopo aver visto  $a_2a_1$  il controllore dovrebbe disabilitare  $b_1$  e abilitare  $b_2$ , mentre dopo aver visto  $a_1a_2$  il controllore dovrebbe abilitare  $b_1$  e disabilitare  $b_2$ , ma per l'inosservabilit  di  $a_2$  il controllore non   in grado di distinguere  $a_2a_1$  da  $a_1a_2$  (vede la loro proiezione comune come  $a_1$ ), e quindi non sa che azione intraprendere dopo aver visto  $a_1$ .

- (d) Si costruisca  $H_{a,obs}$ , l'automa osservatore di  $H_a$ .

Traccia di soluzione.

Nell'automa  $H_a$  si sostituisce  $a_2$  con  $\epsilon$  e poi si applica l'algoritmo per determinizzare mediante la  $\epsilon$ -chiusura. Si veda l'automa  $H_{a,obs}$  risultante in allegato.

- (e) Si risponda alla domanda del punto precedente sull'osservabilit  utilizzando l'automa osservatore. Si spieghi con chiarezza il procedimento.

Traccia di soluzione.

Si esaminano gli stati di  $H_{a,obs}$  per verificare se ce n'  almeno uno che testimonia un conflitto di controllo. Nel caso specifico, lo stato  $\{1, 4, 9\}$  testimonia tale conflitto, poich  l'azione di controllo nello stato 4 di  $H_a$  richiede l'abilitazione dell'evento  $b_2$  e la disabilitazione dell'evento  $b_1$ , che   esattamente l'opposto di quanto richiesto nello stato 9. La presenza di tale conflitto di controllo in  $H_{a,obs}$  indica che  $K$  non   osservabile.

- (f) Si restringa il comportamento dell'impianto rappresentato da  $G$ , applicandogli l'azione di controllo del seguente supervisore  $S_A$ : all'inizio abilita  $a_2$  e  $b_2$  (ma disabilita  $a_1$ ), poi dopo aver visto  $b_2$  abilita  $a_1$  e  $b_1$  sino alla fine.

Si designi come  $H_{A,a}$  l'automa che rappresenta tale comportamento ristretto dell'impianto  $G$  sotto il controllo del supervisore  $S_A$ , cioè' sia  $K_A$  la nuova specifica del comportamento ammissibile, dove  $K_A = \mathcal{L}_m(H_{A,a}) = \mathcal{L}_m(S_A/G)$ .

Si risponda alla seguenti domande. Nota bene: in tutti gli automi s'indichino con chiarezza gli stati accettanti.

- i. Si discuta intuitivamente questa politica di controllo. Quali stringhe marcate dell'impianto sono permesse da essa ?

Traccia di soluzione.

Abbiamo dimostrato formalmente che non vale l'osservabilità'. Intuitivamente perché' non vale ? Se il supervisore all'inizio abilitasse sia  $a_1$  che  $a_2$ , e poi si osservasse  $a_1$ . allora non si saprebbe se l'impianto e' nello stato 1 o 4 e nel secondo caso non si saprebbe se e' arrivato a 4 dal cammino  $a_1a_2$  (che richiederebbe di disabilitare  $b_2$ ) o da  $a_2a_1$  (che richiederebbe di disabilitare  $b_1$ ). Quindi non si saprebbe che politica di controllo attuare a questo punto. Per produrre un sottoinsieme della specifica ammissibile proposta (senza produrre stringhe fuori specifica e senza che l'impianto si blocchi), il supervisore all'inizio può' abilitare solo uno tra  $a_1$  e  $a_2$ , ma non entrambi. Il supervisore  $S_A$  sceglie di abilitare solo  $a_2$ .

L'unica stringa marcata permessa sotto controllo e'  $a_2b_2a_1b_1$ .

- ii. Si disegni l'automa  $H_{A,a}$ .

Traccia di soluzione.

Si disegni l'automa che marca la stringa  $a_2b_2a_1b_1$ . Si veda la figura nell'allegato.

- iii. Si disegni  $H_{A,a,obs}$ , l'automa osservatore di  $H_{A,a}$ .

Traccia di soluzione.

Si disegni l'automa osservatore ottenuto dalla determinizzazione del precedente, in cui si e' posto  $a_2 = \epsilon$ . Si veda la figura nell'allegato.

iv. Si costruisca una realizzazione  $R_{A,real}$  di  $S_A$ . Si ricordi che una realizzazione e' semplicemente un automa che rappresenta la politica di controllo del supervisore. Si seguano i seguenti passi:

A. Si costruisca un automa potato ("trim")  $R_A$  che genera e marca la specifica  $\overline{K_A}$ , cioe' tale che  $\mathcal{L}_m(R_A) = \mathcal{L}(R_A) = \overline{K_A}$ , dove  $K_A = \mathcal{L}_m(H_{A,a}) = \mathcal{L}_m(S_A/G)$ .

Traccia di soluzione.

$R_A$  e' come  $H_{A,a}$ , con la differenza che tutti gli stati del primo sono marcati. Si veda la figura nell'allegato.

B. Si disegni  $R_{A,obs}$ , l'automat osservatore di  $R_A$ .

Traccia di soluzione.

$R_{A,obs}$  e' come  $H_{A,a,obs}$ , con la differenza che tutti gli stati del primo sono marcati. Si veda la figura nell'allegato.

C. Si disegni  $R_{A,real}$ , che e' la realizzazione standard di  $S_A$ , ottenuta aggiungendo autoanelli in ogni stato  $x_{obs}$  di  $R_{A,obs}$  per ogni evento inosservabile in

$$\bigcup_{x \in x_{obs}} \Gamma_{R_A}(x)$$

( $\Gamma$  e' la funzione di attivazione dell'automat).

Traccia di soluzione.

$R_{A,real}$  e' come  $R_{A,obs}$ , con l'aggiunta nel primo di un autoanello con evento  $a_2$  nello stato iniziale. Si veda la figura nell'allegato.

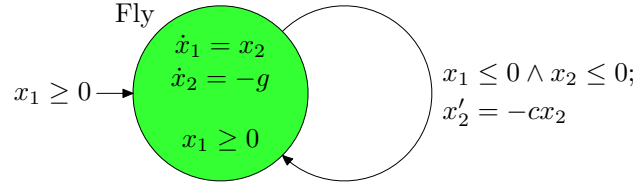


Figure 1: La palla che rimbalza

2. Si consideri l'automa ibrido mostrato nella Fig. 1 che modella un oggetto elastico di posizione  $x_1(t)$  e velocità  $x_2(t)$  che cade al suolo per la legge di gravitazione e rimbalza con coefficiente di elasticità  $c$ . Si assuma che sia  $c = 0,5$ .

(a) Si descriva formalmente tale automa secondo la notazione usata in classe.

Traccia di soluzione.

- locazioni:  $Q = \{l_1\}$ , dove  $l_1$  è la locazione iniziale con condizioni iniziali  $x_1(t) \geq 0$ ;
- dinamica della locazione  $l_1$ :  $\dot{x}_1(t) = x_2(t), \dot{x}_2(t) = -g$ ,  
invariante della locazione  $l_1$ :  $x_1(t) \geq 0$
- transizione da  $l_1$  a  $l_1$ :  $A/assente, x'_2(t) := -0,5x_2$ ,  
dove  $A = \{(x_1(t), x_2(t), u(t)) \mid x_1(t) \leq 0 \wedge x_2(t) \leq 0 \wedge u(t) = assente\}$ ,  
(la sintassi delle annotazioni di una transizione è *guardia/uscita, azione*);
- ingresso  $u(t) \in \{assente\}$ ;
- uscita  $y(t) \in \{assente\}$ .



- (b) Si descriva il funzionamento del sistema in base alla semantica dell'automato ibrido che lo rappresenta.

Si descrivano qualitativamente le traiettorie descritte dalle variabili continue  $x_1$  e  $x_2$ . Per fissare le idee, si assumano i valori iniziali  $x_1 = 5$  e  $x_2 = 0$ .

Traccia di soluzione.

Per una descrizione del comportamento e disegni di traiettorie della posizione e della velocità si consulti il materiale di testo (Lee-Varaiya o Lee-Seshia).