

Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche
Tiziano Villa

24 Settembre 2014

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	21	
problema 2	9	
totale	30	

1. (a) Si considerino le seguenti macchine a stati finiti:

Macchina M_1 :

- Ingresso: $U = \{0, 1\}$;
- Uscita: $V = \{0, 1\}$;
- Stati: $S = \{s_{1A}, s_{2B}, s_{3B}, s_d\}$ con s_{1A} stato iniziale;
- Transizioni (etichetta U/V):
 - transizione da s_{1A} a s_{2B} : $1/0$,
 - transizione da s_{1A} a s_{3B} : $1/1$,
 - transizione da s_{1A} a s_d : $0/-$,
 - transizione da s_{2B} a s_{1A} : $0/0$,
 - transizione da s_{2B} a s_d : $0/1$,
 - transizione da s_{2B} a s_{2B} : $1/0$,
 - transizione da s_{3B} a s_{1A} : $0/1$,
 - transizione da s_{3B} a s_{3B} : $1/1$,
 - transizione da s_{3B} a s_{2B} : $1/0$,
 - transizione da s_d a s_d : $-/-$.

Macchina M_2 :

- Ingressi: $X, V = \{0, 1\}$;
- Uscite: $U, Z = \{0, 1\}$;
- Stati: $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ con s_1 stato iniziale;
- Transizioni (etichetta XV/UZ):
 - transizione da s_1 a s_1 : $1- / 11$,
 - transizione da s_1 a s_2 : $00/10$,
 - transizione da s_1 a s_3 : $01/10$,
 - transizione da s_2 a s_1 : $-0/01$,
 - transizione da s_2 a s_3 : $-1/10$,
 - transizione da s_3 a s_1 : $-1/01$,
 - transizione da s_3 a s_2 : $-0/00$.

Si disegnino i diagrammi di transizione delle macchine M_1 e M_2 . Si classifichino M_1 e M_2 rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

M_1 e' pseudo-nondeterministica.

M_2 e' deterministica.

- (b) Si chiudano ad anello la macchina M_1 con la macchina M_2 , eliminando i segnali U e V per ottenere una macchina composta con ingresso X e uscita Z . Si costruisca tale macchina composta $M_1 \times M_2$.

Traccia di soluzione.

Si mostra la tavola delle transizioni della macchina $M_1 \times M_2$.

	<i>stati presenti</i>				
	(s_{1A}, s_1)	(s_{2B}, s_1)	(s_{2B}, s_2)	(s_{3B}, s_1)	(s_{3B}, s_3)
X/Z	<i>stati futuri</i>				
0/0	$(s_{2B}, s_2), (s_{3B}, s_3)$	(s_{2B}, s_2)	—	$(s_{2B}, s_2), (s_{3B}, s_3)$	—
0/1	—	—	(s_{1A}, s_1)	—	(s_{1A}, s_1)
1/0	—	—	—	—	—
1/1	$(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)$	(s_{2B}, s_1)	(s_{1A}, s_1)	$(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)$	(s_{1A}, s_1)

E' inutile indicare gli stati irraggiungibili e ancora di piu' portarseli dietro nelle domande/risposte successive, per non affogare in calcoli in cui e' facile introdurre errori.

- (c) Si descriva brevemente l'algoritmo per la minimizzazione degli stati di una macchina a stati finiti che produce una macchina equivalente con un numero minimo di stati tra quelle bisimili.

- (d) Applicando l'algoritmo precedente si minimizzi il numero degli stati di $M_1 \times M_2$ ottenendo la macchina $Min(M_1 \times M_2)$.

Si mostrino il procedimento e la macchina risultante $Min(M_1 \times M_2)$. Si classifichi $Min(M_1 \times M_2)$ rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

Per semplificare la derivazione, si e' applicato l'algoritmo tabulare alla tavola delle transizioni.

Si parte dalla tavola

	<i>stati presenti</i>				
	(s_{1A}, s_1)	(s_{2B}, s_1)	(s_{2B}, s_2)	(s_{3B}, s_1)	(s_{3B}, s_3)
<i>X/Z</i>	<i>stati futuri</i>				
0/0	$(s_{2B}, s_2), (s_{3B}, s_3)$	(s_{2B}, s_2)	—	$(s_{2B}, s_2), (s_{3B}, s_3)$	—
0/1	—	—	(s_{1A}, s_1)	—	(s_{1A}, s_1)
1/0	—	—	—	—	—
1/1	$(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)$	(s_{2B}, s_1)	(s_{1A}, s_1)	$(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)$	(s_{1A}, s_1)

Gli stati (s_{2B}, s_2) e (s_{3B}, s_3) sono equivalenti (si noti che le loro colonne di stati futuri coincidono). Percio' ci riduciamo a una tavola con una colonna in meno dove lo stato (s_{3B}, s_3) e' rimpiazzato dallo stato (s_{2B}, s_2) .

	<i>stati presenti</i>			
	(s_{1A}, s_1)	(s_{2B}, s_1)	(s_{2B}, s_2)	(s_{3B}, s_1)
<i>X/Z</i>	<i>stati futuri</i>			
0/0	(s_{2B}, s_2)	(s_{2B}, s_2)	—	(s_{2B}, s_2)
0/1	—	—	(s_{1A}, s_1)	—
1/0	—	—	—	—
1/1	$(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)$	(s_{2B}, s_1)	(s_{1A}, s_1)	$(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)$

Gli stati (s_{1A}, s_1) , (s_{2B}, s_1) e (s_{3B}, s_1) sono equivalenti. Percio' ci riduciamo a una tavola con due colonne in meno dove gli stati (s_{2B}, s_1) e (s_{3B}, s_1) sono rimpiazzati dallo stato (s_{1A}, s_1) .

	<i>stati presenti</i>	
	(s_{1A}, s_1)	(s_{2B}, s_2)
<i>X/Z</i>	<i>stati futuri</i>	
0/0	(s_{2B}, s_2)	—
0/1	—	(s_{1A}, s_1)
1/0	—	—
1/1	(s_{1A}, s_1)	(s_{1A}, s_1)

I due stati rimasti non sono equivalenti, per cui abbiamo ottenuto la macchina $Min(M_1 \times M_2)$.

$Min(M_1 \times M_2)$ e' deterministica.

- (e) Si descriva brevemente l'algoritmo per determinizzare una macchina a stati finiti non-deterministica.

- (f) Si classifichi $M_1 \times M_2$ rispetto al determinismo. Applicando l'algoritmo precedente, si determinizzi $M_1 \times M_2$ ottenendo la macchina $Det(M_1 \times M_2)$. Si mostrino il procedimento e la macchina risultante $Det(M_1 \times M_2)$. Si classifichi $Det(M_1 \times M_2)$ rispetto al determinismo.

Traccia di soluzione.

La macchina $M_1 \times M_2$ e' nondeterministica, ma non pseudo-nondeterministica.

Data la macchina

	<i>stati presenti</i>				
	(s_{1A}, s_1)	(s_{2B}, s_1)	(s_{2B}, s_2)	(s_{3B}, s_1)	(s_{3B}, s_3)
<i>X/Z</i>	<i>stati futuri</i>				
0/0	$(s_{2B}, s_2), (s_{3B}, s_3)$	(s_{2B}, s_2)	—	$(s_{2B}, s_2), (s_{3B}, s_3)$	—
0/1	—	—	(s_{1A}, s_1)	—	(s_{1A}, s_1)
1/0	—	—	—	—	—
1/1	$(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)$	(s_{2B}, s_1)	(s_{1A}, s_1)	$(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)$	(s_{1A}, s_1)

applicando l'algoritmo di determinizzazione si ottiene $Det(M_1 \times M_2)$:

	<i>stati presenti</i>		
	$\{(s_{1A}, s_1)\}$	$\{(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)\}$	$\{(s_{2B}, s_2), (s_{3B}, s_3)\}$
<i>X/Z</i>	<i>stati futuri</i>		
0/0	$\{(s_{2B}, s_2), (s_{3B}, s_3)\}$	$\{(s_{2B}, s_2), (s_{3B}, s_3)\}$	—
0/1	—	—	$\{(s_{1A}, s_1)\}$
1/0	—	—	—
1/1	$\{(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)\}$	$\{(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)\}$	$\{(s_{1A}, s_1)\}$

La macchina $Det(M_1 \times M_2)$ e' deterministica.

Si noti che il comportamento di una macchina e' nondeterministico se esiste almeno una sequenza d'ingresso cui risponde con almeno due sequenze d'uscita diverse. Per stabilire se il comportamento di una macchina e' nondeterministico, la si determinizza e poi si verifica se c'e' almeno uno stato dove per un certo ingresso sono prodotte due uscite diverse.

Nel nostro caso, il fatto che $Min(M_1 \times M_2)$ e' una macchina deterministica mostra che il comportamento di $M_1 \times M_2$ e' deterministico.

(g) Si minimizzi la macchina $Det(M_1 \times M_2)$.

Traccia di soluzione.

Poiche' gli stati $\{(s_{1A}, s_1)\}$ e $\{(s_{2B}, s_1), (s_{3B}, s_1)\}$ sono equivalenti, si ottiene una macchina $Min(Det(M_1 \times M_2))$ con due stati, che e' isomorfa alla macchina $Min(M_1 \times M_2)$ calcolata in precedenza.

2. Si consideri il seguente sistema composto da due cisterne contenenti acqua, indicizzate come cisterna n. 1 e cisterna n. 2. Entrambe le cisterne rilasciano in continuazione acqua, ciascuna con un flusso in uscita costante indicato rispettivamente da $v_1 > 0$ per la prima, e da $v_2 > 0$ per la seconda. Si aggiunge acqua al sistema tramite un tubo che garantisce un flusso costante in ingresso w , e che in qualsiasi istante di tempo sta riempiendo o l'una o l'altra cisterna, tranne durante lo spostamento del tubo da una cisterna all'altra che richiede un tempo piccolo ϵ . I volumi d'acqua nelle due cisterne siano rispettivamente $x_1(t)$ e $x_2(t)$. L'obiettivo e' di mantenere i volumi di acqua nelle due cisterne sopra i valori rispettivamente r_1 e r_2 , assumendo che inizialmente cio' sia vero. Questo obiettivo si ottiene mediante un controllore che sposta il tubo alla cisterna n. 1 quando $x_1(t) \leq r_1$ o alla cisterna n. 2 quando $x_2(t) \leq r_2$.

Si rappresenti tale sistema con il seguente automa ibrido che ha due variabili di stato $x_1(t)$ e $x_2(t)$, un orologio $x_3(t)$, e l'uscita $y(t) \equiv (x_1(t), x_2(t))$, con $r_1 = r_2 = 0$, $v_1 = v_2 = 0,5$, $w = 0,75$ e $0 < \epsilon \ll 1$:

- locazioni: l_1, l_2, l_3, l_4 ;
- condizioni iniziali: locazione = l_1 , $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 0$;
- dinamica della locazione l_1 : $\dot{x}_1(t) = w - v_1$, $\dot{x}_2(t) = -v_2$, $\dot{x}_3(t) = 0$, $y(t) = (x_1(t), x_2(t))$,
invariante della locazione l_1 : $x_2(t) \geq r_2$,
dinamica della locazione l_2 : $\dot{x}_1(t) = -v_1$, $\dot{x}_2(t) = w - v_2$, $\dot{x}_3(t) = 0$, $y(t) = (x_1(t), x_2(t))$,
invariante della locazione l_2 : $x_1(t) \geq r_1$,
dinamica della locazione l_3 : $\dot{x}_1(t) = w - v_1$, $\dot{x}_2(t) = -v_2$, $\dot{x}_3(t) = 1$, $y(t) = (x_1(t), x_2(t))$,
invariante della locazione l_3 : $x_3(t) \leq \epsilon$,
dinamica della locazione l_4 : $\dot{x}_1(t) = -v_1$, $\dot{x}_2(t) = w - v_2$, $\dot{x}_3(t) = 1$, $y(t) = (x_1(t), x_2(t))$,
invariante della locazione l_4 : $x_3(t) \leq \epsilon$;

- transizione da l_1 a l_3 : $A/y(t), x_1(t) := x_1(t), x_2(t) := x_2(t), x_3(t) := x_3(t)$,
transizione da l_3 a l_2 : $C/y(t), x_1(t) := x_1(t), x_2(t) := x_2(t), x_3(t) := 0$,
transizione da l_2 a l_4 : $B/y(t), x_1(t) := x_1(t), x_2(t) := x_2(t), x_3(t) := x_3(t)$,
transizione da l_4 a l_1 : $D/y(t), x_1(t) := x_1(t), x_2(t) := x_2(t), x_3(t) := 0$,
dove $A = \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \mid x_2(t) \leq r_2\}$,
 $C = \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \mid x_3(t) \geq \epsilon\}$,
 $B = \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \mid x_1(t) \leq r_1\}$,
 $D = \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \mid x_3(t) \geq \epsilon\}$
(la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso assente perche' il sistema e' autonomo;
- uscita $y(t) \in \text{Reali}$.

- (a) Si disegni il diagramma di transizione degli stati dell'automa, annotando con precisione locazioni e transizioni.

- (b) Si studino e disegnino qualitativamente le traiettorie del sistema nel piano cartesiano fino al tempo $t = 10$ (con il tempo in ascissa e le variabili di stato $x_1(t)$ e $x_2(t)$ in ordinata) a partire da l_1 e $x_1(0) = 0, x_2(0) = 1$. Che cosa si può dire sull'insieme degli stati raggiungibili dell'automa?

Traccia di soluzione.

Vedi grafico allegato.

Si consideri il comportamento asintotico del sistema per $\epsilon \rightarrow 0+$, cioè $\epsilon > 0$ molto piccolo.

Dalla formula $t_0 + (x_1(t_0) + x_2(t_0) - r_1 - r_2) / (v_1 + v_2 - w) = 1/0,25 = 4$ si ottiene il tempo limite $\tau_\infty = 4$.

Per $t \leq 4$, il comportamento asintotico del sistema tende a quello del sistema con le due sole locazioni l_1 e l_2 (con spostamento istantaneo del tubo da una cisterna a un'altra).

Per $t > 4$, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ tendono a 0, cioè le cisterne si svuotano; si noti che il bilancio netto di uscita dell'acqua è $v_1 + v_2 - w = 0,5 + 0,5 - 0,75 = 0,25$.

Vedi punto successivo.

- (c) L'automa ibrido proposto presenta comportamenti zenoniani, cioè tali che si abbia un numero infinito di transizioni discrete in un tempo finito ? Si giustifichi la risposta.

Traccia di soluzione.

Il sistema non è zenoniano. Da quando una cisterna è vuota a quando inizia ad essere riempita passa una quantità di tempo ϵ positiva, perciò il tempo continua a progredire. Sta qui la differenza rispetto al sistema con le due sole locazioni l_1 e l_2 che è zenoniano, perché si blocca a $t = 4$.