Università degli Studi di Verona Anno Accademico 2016-2017
CL in Matematica Applicata
Algebra

Foglio di Esercizi n°9 - 14/12/2016

(Da consegnare il giorno 21/12/2016)

Esercizio 1

(*6 punti*) Sia K un campo di caratteristica diversa da 3 tale che il polinomio $f = x^3-3x+1$ sia irriducibile in $K[x]$. Sia α una radice di f (in un'estensione di K) e sia $F = K(\alpha)$. Dimostrare che f si spezza completamente su F e dedurre che l'estensione $K \subset F$ è di Galois e che $\mathrm{Gal}(F/K)=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
[*Suggerimento: osservare che* $12 - 3\alpha^2$ *è un quadrato perfetto in* F, *infatti* $12 - 3\alpha^2 = (-4 + \alpha + 2\alpha^2)^2$.]

Esercizio 2

Sia K un campo di caratteristica $p \neq 0$ e sia $a \in K$ tale che il polinomio $f = x^p - x - a$ sia irriducibile in $K[x]$. Sia α uno zero di f in un'estensione di K.

1) (*3 punti*) Dimostrare che per ogni $m \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\alpha + m$ è uno zero di f.
2) (*3 punti*) Dimostrare che $K(\alpha)$ è campo di riducibilità completa di f.
3) (*3 punti*) Dedurre che $K \subset K(\alpha)$ è un'estensione di Galois.
4) (*3 punti*) Dimostrare che $\mathrm{Gal}(K(\alpha)/K)$ è ciclico di ordine p.

Esercizio 3

Sia F il campo di riducibilità completa del polinomio $f = x^4 - 9$ su $\mathbb{Q}$.

1) (*3 punti*) Verificare che $\mathbb{Q} \subset F$ è un'estensione di Galois e trovare una $\mathbb{Q}$-base di F.
2) (*3 punti*) Determinare tutti gli elementi di $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ e verificare che esso è isomorfo al gruppo di Klein.
3) (*3 punti*) Determinare tutti i sottogruppi di $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ e tutti i campi intermedi $\mathbb{Q} \subset L \subset F$.
4) (*3 punti*) Dimostrare che $\mathbb{Q} \subset L$ è un'estensione di Galois per ogni campo intermedio $\mathbb{Q} \subset L \subset F$.