5 Equazioni differenziali scalari

Il problema dell'*integrazione indefinita* (data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, determinarne tutte le primitive) può essere espresso in forma di equazione come

$$y' = f(x), \tag{5.1}$$

che va intesa così: *trovare tutte le funzioni derivabili $y(x)$ tali che $y' = f(x)$*. Tali funzioni sono le *soluzioni* del problema (5.1) e, se f è continua, già sappiamo come sono fatte: una soluzione $F(x)$ esiste sempre (vedi il Teorema 3.5.12 di Torricelli), e tutte le altre, infinite, si trovano come $F(x) + k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

L'equazione (5.1) può essere vista come prototipo di un'*equazione differenziale scalare* (ordinaria), ovvero un problema in cui *si chiede di determinare una funzione $y : I \to \mathbb{R}$*, definita su un *intervallo $I \subset \mathbb{R}$*, *a partire da una relazione in cui possono apparire le sue derivate* (ivi compresa eventualmente la stessa funzione y, vista come derivata di ordine zero) *e la variabile x*.

Esempi. Esempi base di equazioni differenziali sono

$$y' = \frac{1}{2} + \cos x, \qquad y'' = 6x, \qquad y' = y$$

che possiamo provare a risolvere: la prima non pone problemi perché, integrando, ci dà $y(x) = \frac{1}{2}x + \sin x + k$ con $k \in \mathbb{R}$; la seconda nemmeno, perché, integrando due volte di seguito, ci dà in sequenza $y'(x) = 3x^2 + h$ e $y(x) = x^3 + hx + k$ con $h, k \in \mathbb{R}$; invece nella terza, in cui ci si chiede quali sono le funzioni che, derivate, restano uguali a se stesse, sicuramente troviamo soluzioni del tipo $k\,e^x$ con $k \in \mathbb{R}$, ma non sapremmo dire ora se ve ne siano altre o no.

Un'equazione differenziale può assumere un aspetto ben più complicato di quelle proposte finora, come le seguenti:

$$x^2y' - 4y^2 = \cos(x+y), \quad (1+3x)y''' + y''\sqrt{1+4\cos x} - y = \log(e^{2x}-1), \quad y''' = \frac{\operatorname{tg}(xy'')}{1+y(y')^2},$$

ove la funzione da determinare appare sempre come $y(x)$ (e dunque $y'(x)$, $y''(x)$ e $y'''(x)$ sono le sue derivate prima, seconda e terza). [76]

Cerchiamo ora di fissare qualche termine di uso corrente nella teoria delle equazioni differenziali. L'insieme delle funzioni soluzione di una data equazione differenziale si dirà

[76] Nella denominazione "equazione differenziale scalare ordinaria", l'aggettivo "ordinaria" si riferisce al fatto che la funzione incognita φ ha come dominio un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (ovvero, dipende da *una sola* variabile reale), mentre l'aggettivo "scalare", invece, al fatto che φ ha come codominio $\mathbb{R}$ (e dunque assume valori reali). Se la funzione incognita dipende da più variabili $x_1, \dots, x_n$, l'equazione differenziale conterrà, nella sua forma generale, le derivate parziali di vario ordine rispetto a queste variabili, e si dirà *equazione differenziale alle derivate parziali*; se invece la funzione incognita ha valori vettoriali (cioè in $\mathbb{R}^m$ anziché in $\mathbb{R}$), si parlerà anche di *sistema di equazioni differenziali*: in tale caso, la funzione incognita φ sarà in realtà una m-upla di funzioni incognite $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ ognuna delle quali è a valori in $\mathbb{R}$. In questo corso ci occuperemo esclusivamente di equazioni differenziali scalari ordinarie.

integrale generale dell'equazione. L'*ordine* di un'equazione differenziale è il massimo ordine di derivata presente. Un'equazione differenziale di ordine n si dirà essere:

(a) *in forma normale* se in essa la derivata di ordine massimo $y^{(n)}$ appare esplicitata rispetto a quelle di ordine inferiore (ovvero $y = y^{(0)}$, y', ... , $y^{(n-1)}$) e alla variabile x;

(b) *lineare* se essa appare come un polinomio di primo grado nelle derivate $y = y^{(0)}$, y', ... , $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ della funzione incognita $y(x)$.

Dunque, negli ultimi tre esempi proposti la prima equazione è del primo ordine, mentre la seconda e la terza sono del terzo ordine; l'unica equazione in forma normale è la terza, e l'unica lineare è la seconda.

Se già occupandoci di integrazione indefinita abbiamo capito che si riesce a risolvere in modo "elementare" solo una piccola frazione dei casi possibili, dovrebbe essere chiaro che, a maggior ragione, non c'è alcuna speranza di trovare metodi per risolvere in modo "elementare" un'equazione differenziale qualsiasi: ci limiteremo dunque allo studio di alcune equazioni differenziali di carattere molto particolare, anche se importanti. Però prima facciamo ancora alcune osservazioni che ci possono meglio introdurre al tipo di problema che stiamo per affrontare.

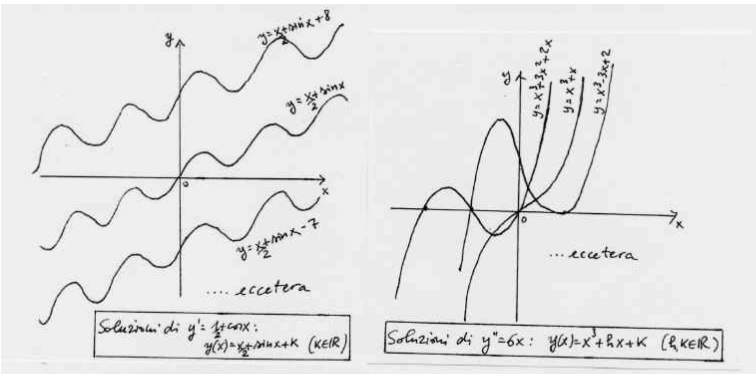

Figura 5.1: *Integrale generale di* $y' = \frac{1}{2} + \cos x$ *e di* $y'' = 6x$

- In generale, *un'equazione differenziale ha infinite soluzioni.* Ciò appare evidente già nei casi più semplici: come visto, l'integrale generale dell'equazione $y' = g(x)$ per una data funzione continua $g : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è dato da tutte e sole le funzioni della famiglia $\{G(x) + k : k \in \mathbb{R}\}$, ove G è una qualsiasi primitiva di g, mentre quello dell'equazione $y'' = 6x$ sono (integrando due volte) da tutte e sole le funzioni della famiglia $\{x^3 + hx + k : h, k \in \mathbb{R}\}$. Nel primo caso, dunque, la famiglia è descritta da un parametro libero k, nel secondo da due parametri liberi h e k (vedi Figura 5.1).

- Può accadere che *le soluzioni di un'equazione differenziale siano definite su un dominio più piccolo* di quanto dava a vedere il problema iniziale. Ad esempio, come vedremo tra breve, l'equazione $y' = y$ ha soluzioni $\{\varphi_k(x) = ke^x : k \in \mathbb{R}\}$ (si noti che tutte le φ_k sono definite su $\mathbb{R}$), mentre l'equazione $y' = y^2$ ha soluzioni $\{\varphi_k(x) = \frac{k}{1-kx} : k \in \mathbb{R}\}$ (si noti che, per $k \neq 0$, la funzione $\varphi_k(x)$ non è definita in $x = \frac{1}{k}$; vedi Figura 5.2).[77]

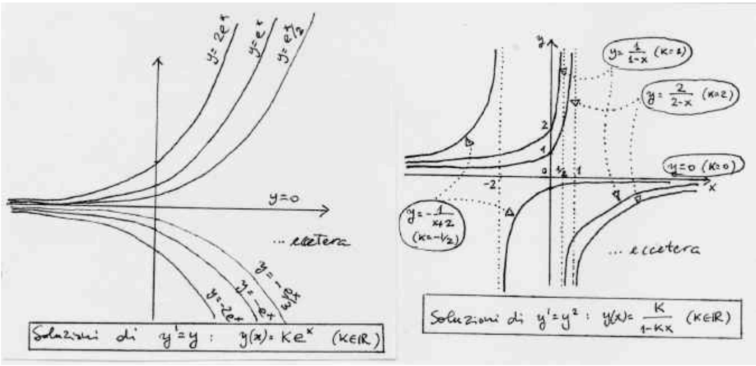

Figura 5.2: *Integrale generale di $y' = y$ e di $y' = y^2$*

- Il *problema di Cauchy* consiste nell'assegnare, oltre ad un'equazione differenziale (diciamo di ordine n), anche i valori che la soluzione e le sue derivate di ordine inferiore devono assumere in un certo punto x_0 (ovvero, i numeri $\alpha_0 = y(x_0) = y^{(0)}(x_0)$, $\alpha_1 = y'(x_0)$, ..., $\alpha_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0)$). Come vedremo tra breve, in parecchi casi si può dimostrare che *di soluzioni dell'equazione che soddisfano tali "condizioni iniziali" ne esiste una e soltanto una, almeno localmente vicino a x_0*. Non entreremo nei dettagli di questo delicato problema, ma ci limitiamo a dare, senza dimostrazione, la seguente condizione sufficiente, assai spesso soddisfatta nelle applicazioni.

Proposizione 5.0.7. *Si consideri un'equazione differenziale di ordine n in forma normale:*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \tag{5.2}$$

ove $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione definita in $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e di classe $\mathcal{C}^1$. [78] *Allora, preso un qualsiasi punto $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Omega$ interno ad Ω,* [79] *esiste ed è unica* (localmente in x_0) *una soluzione $\varphi(x)$ di* (5.2) *tale che soddisfa le condizioni iniziali*

$$\varphi(x_0) = y_0, \qquad \varphi'(x_0) = y_1, \qquad \dots, \qquad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

[77] Anticipiamo già che per le equazioni differenziali *lineari* non accadono queste sorprese: le soluzioni saranno definite nel dominio che ci si attende dall'equazione stessa (si osservi che, non a caso, l'equazione $y' = y^2$ non è lineare).

[78] ovvero, con derivate parziali tutte continue in Ω.

[79] ovvero, tale che esiste $\delta > 0$ tale che $B_{(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})}(\delta) \subset \Omega$: in altre parole, esiste una palla centrata in $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ tutta contenuta in Ω.

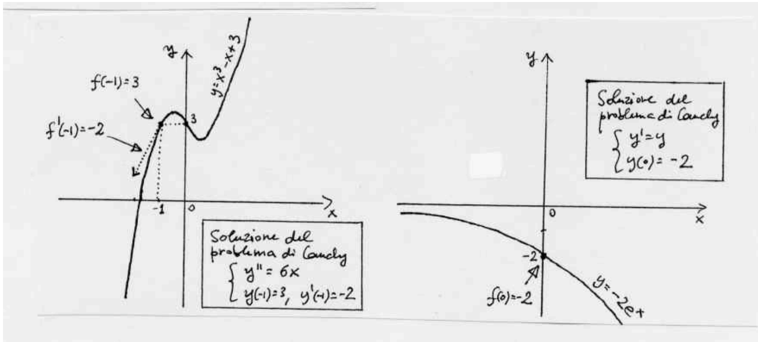

Figura 5.3: *Soluzione particolare di un problema di Cauchy del secondo e del primo ordine*

Ad esempio, sia l'equazione $y' = y$ che l'equazione $y'' = 6x$ soddisfano evidentemente le ipotesi della Proposizione 5.0.7 (nel primo caso si ha $f(x, y) = y$, di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\Omega = \mathbb{R}^2$; nel secondo si ha $f(x, y, y') = x$, di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\Omega = \mathbb{R}^3$), e pertanto, una volta fissate delle condizioni iniziali in entrambi i casi, le rispettive soluzioni esisteranno e saranno uniche. Ad esempio, si è detto che le soluzioni dell'equazione $y' = y$ sono quelle della famiglia $\{ke^x : k \in \mathbb{R}\}$, ma se si impone che sia $y(0) = -2$ si ottiene $ke^0 = -2$, da cui $k = -2$, ovvero l'unica soluzione $\varphi(x) = -2e^x$; si è detto che le soluzioni dell'equazione $y'' = 6x$ sono tutte e sole le funzioni della famiglia $\{x^3 + hx + k : h, k \in \mathbb{R}\}$, ma se si impone che sia $y(-1) = 3$ e $y'(-1) = 2$ si ottiene $h - k = -1$ e $h = -1$, ovvero $(h, k) = (-1, 3)$, ovvero l'unica soluzione $\varphi(x) = x^3 - x + 3$ (vedi Figura 5.3).

Come conseguenza di quanto appena detto nella Proposizione 5.0.7 per le equazioni scalari di ordine n, ragioniamo sui casi di equazioni del primo o secondo ordine.

– *Se un problema scalare del primo ordine $y' = f(x, y)$ ha esistenza ed unicità locale, i grafici di due sue soluzioni distinte non possono mai intersecarsi*: se infatti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ fossero due soluzioni distinte tali che $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$, allora entrambe risolverebbero il problema di Cauchy con dato iniziale $y(x_0) = y_0$, dunque dovrebbero essere uguali in un intorno di x_0 e, procedendo per unicità nei punti vicini, dovrebbero essere uguali (sul loro dominio massimale), assurdo.

– Invece, *se un problema scalare del secondo ordine $y'' = f(x, y, y')$ ha esistenza ed unicità locale, i grafici di due sue soluzioni distinte possono intersecarsi, ma nei punti di intersezione devono avere pendenze diverse*: se infatti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ fossero due soluzioni distinte tali che $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ e $y_1'(x_0) = y_2'(x_0) = y_1$, allora entrambe risolverebbero il problema di Cauchy con dato iniziale $(y(x_0), y'(x_0)) = (y_0, y_1)$, e si arriverebbe ancora ad un assurdo. La Figura 5.1 mostra con chiarezza quanto si è appena dedotto.

- Come detto, risolvere un'equazione differenziale qualsiasi ottenendo risultati quasi-elementari è generalmente impossibile: si possono risolvere completamente solo alcuni casi di particolare interesse, che tratteremo nel seguito. Tuttavia, anche se non è possibile scrivere la soluzione in modo esplicito, spesso si possono ottenere sul suo conto parecchie informazioni *solo a partire dal legame tra essa e le sue derivate così come descritto nell'equazione*, ad esempio sul dominio, o sugli asintoti, o sulla crescenza, o sulla convessità, e così via. Vediamo un paio di esempi.

(1) Si abbia l'equazione differenziale $y' = y$, per la quale abbiamo anticipato che le soluzioni sono le funzioni $y(x) = ke^x$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Però, anche non sapendo quali siano le soluzioni, si può già dire in quali zone del piano (x, y) esse saranno *strettamente crescenti/decrescenti* solo dalla conoscenza dell'equazione data $y' = y$: per funzioni derivabili, come noto, ciò equivale ad avere la derivata $y'(x)$ strettamente positiva/negativa, ma essendo $y' = y$ si ricava che le soluzioni $y(x)$ saranno strettamente crescenti (risp. strettamente decrescenti) se e solo se esse sono > 0 (risp. < 0). Inoltre, se deriviamo rispetto ad x l'equazione $y' = y$ (supponendo che $y = y(x)$ sia derivabile due volte) si ricava $y'' = y' \,(= y)$, da cui $y'' > 0$ (cioè la soluzione y è strettamente convessa) ancora una volta se e solo se essa è > 0. (Naturalmente, tutto ciò concorda con le caratteristiche della famiglia delle soluzioni ke^x.)

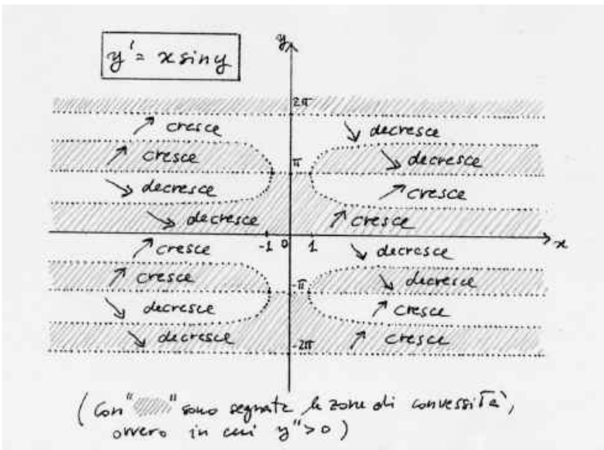

Figura 5.4: *Prima di risolvere un'equazione differenziale si possono raccogliere parecchie informazioni sulle sue soluzioni.*

(2) Passiamo ad un caso meno immediato. Dall'equazione differenziale $y' = x \sin y$ si ricava che le soluzioni $y(x)$ saranno strettamente crescenti se e solo se $x \sin y > 0$, ovvero se e solo se $x > 0$ e $2k\pi < y < \pi + 2k\pi$ oppure se $x < 0$ e $\pi + 2k\pi < y < 2\pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), e saranno strettamente decrescenti se e solo se $x \sin y < 0$, ovvero se e solo se $x > 0$ e $\pi + 2k\pi < y < 2\pi + 2k\pi$ oppure se $x < 0$ e $2k\pi < y < \pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Inoltre le soluzioni saranno funzioni pari: infatti, se $\varphi(x)$ è soluzione, anche $\psi(x) := \varphi(-x)$ lo sarà, perché $\psi'(x) = -\varphi'(-x) = -(-x)\sin\varphi(-x) = x \sin\psi(x)$. Possiamo anche affermare che, se φ è una soluzione definita in un intorno di 0, essa avrà certamente $\varphi'(0) = 0 \sin \varphi(0) = 0$. Infine, se deriviamo rispetto ad x l'equazione $y' = x \sin y$ (supponendo che $y = y(x)$ sia derivabile due volte) si ricava $y'' = \sin y + xy' \cos y = \sin y + x(x \sin y) \cos y = \sin y(1 + x^2 \cos y)$, da cui $y'' > 0$ (cioè y è strettamente convessa) se e solo se $\sin y > 0$ e $\cos y > -\frac{1}{x^2}$, oppure $\sin y < 0$ e $\cos y < -\frac{1}{x^2}$. Nella Figura 5.4 si rappresentano graficamente sul piano (x, y) questi "pronostici" sulle soluzioni; più avanti risolveremo completamente l'equazione, e potremo verificare che il suo integrale generale si conforma in tutto e per tutto ad essi (vedi Figura 5.5).

5.1 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Consideriamo un'equazione differenziale del primo ordine nella forma

$$f_2(x) g_1(y)\ y' = f_1(x) g_2(y),$$

ove f_1, f_2, g_1 e g_2 sono date funzioni continue, e procediamo alla sua risoluzione anche tenendo presente un'eventuale condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Al fine di comprendere in concreto le operazioni descritte, consigliamo di leggere attentamente gli esempi riportati subito dopo la discussione generale. Denotiamo

$$I = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è nel dominio di } f_1 \text{ e di } f_2\}.$$

(i) Cerchiamo di risolvere direttamente l'equazione differenziale assieme alla condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ nell'ipotesi che $x_0 \in \dot{I}$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ siano tali che

$$f_2(x_0) \neq 0, \qquad g_2(y_0) \neq 0.$$

Se $y(x)$ è una soluzione, essendo $y(x_0) = y_0$ (e dunque $g_2(y(x_0)) = g_2(y_0) \neq 0$), per continuità esisterà un intervallo $I' \subset I$ intorno di x_0 tale che $f_2(x) \neq 0$ e $g_2(y(x)) \neq 0$ per ogni $x \in I$. Dividendo allora ambo i membri per $f_2(x) g_2(y)$ si ottiene la seguente equazione differenziale, da intendersi valida *solo* in un tale intorno I' di x_0:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, y' = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

(ii) Entrambi i membri dell'equazione $\frac{g_1(y(x))}{g_2(y(x))}\, y'(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ sono funzioni della x, e li integriamo tra x_0 ed un generico $x \in I'$, ottenendo $\int_{x_0}^{x} \frac{g_1(y(t))}{g_2(y(t))}\, y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t)}{f_2(t)}\, dt$; operando nell'integrale al primo membro il cambio di variabile $\eta = y(x)$ e ricordando che $\eta(x_0) = y_0$, si ottiene infine

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{g_1(\eta)}{g_2(\eta)} d\eta = \int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t)}{f_2(t)}\, dt.$$

(iii) Siano $G(\eta)$ una primitiva di $\frac{g_1(\eta)}{g_2(\eta)}$ e $F(x)$ una primitiva di $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$: si ottiene allora

$$G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0).$$

(iv) Esplicitando $y(x)$ dall'ultima uguaglianza si ottiene la soluzione $\varphi : I' \to \mathbb{R}$ cercata (univocamente individuata se e solo se $g_1(y_0) \neq 0$),[80] dalla cui espressione apparirà pure evidente quale sarà l'intervallo massimale I' in cui essa è definita: si tratterà del più grande intervallo I' contenuto nel suo dominio naturale, contenente x_0 e tale che $f_2(x) \neq 0$ e $g_2(\varphi(x)) \neq 0$ per ogni $x \in I'$.

(v) Vediamo ora i casi di condizioni iniziali "singolari".
Notiamo innanzitutto che, se $\alpha \in \mathbb{R}$ è tale che $g_2(\alpha) = 0$, allora la funzione costante $y \equiv \alpha$ è soluzione dell'equazione (infatti i due membri risultano identicamente nulli). Ciò può valere, in particolare, per $\alpha = y_0$: dunque, se $g_2(y_0) = 0$ la funzione costante $y(x) \equiv y_0$ è una soluzione dell'equazione differenziale data con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Riguardo l'unicità locale di questa soluzione costante, bisognerà (se possibile, ovvero se $g_1(y_0) \neq 0$ e $f_2(x_0) \neq 0$) porre l'equazione in forma normale e controllare se le ipotesi della Proposizione 5.0.7 sono soddisfatte.
D'altra parte, se $\beta \in \mathbb{R}$ è tale che $f_2(\beta) = 0$, se accade anche che $f_1(\beta) = 0$ allora i due membri risultano identicamente nulli in $x = \beta$ (e dunque ciò non impone alcunché alle soluzioni), mentre se $f_1(\beta) \neq 0$ allora si ottiene che $g_2(y(\beta)) = 0$: ovvero, ogni soluzione $\varphi(x)$ che abbia β nel suo dominio deve soddisfare $g_2(\varphi(\beta)) = 0$. Ciò può valere, in particolare, per $\beta = x_0$: in tal caso, ovvero se $f_2(x_0) = 0$, affinché esistano soluzioni dell'equazione con la condizione $y(x_0) = y_0$ dovrà necessariamente valere $f_1(x_0) = 0$ oppure $g_2(y_0) = 0$. Lo stesso discorso vale se $g_1(y_0) = 0$.

Un caso particolare di equazioni a variabili separabili assai importante nelle applicazioni, soprattutto di carattere fisico e statistico, è quello delle *equazioni autonome in forma normale*, ovvero le equazioni della forma $y' = g(y)$.[81] Per le equazioni autonome il procedimento sopra descritto si specializza come segue.

(i) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ è tale che $g(\alpha) = 0$, allora la funzione costante $y \equiv \alpha$ è soluzione dell'equazione.[82]

(ii) Siano ora (x_0, y_0) con $g(y_0) \neq 0$, e cerchiamo la soluzione $\varphi(x)$ per cui $\varphi(x_0) = y_0$. Dividendo ambo i membri per $g(y)$ si ottiene $\frac{1}{g(y)}\, y' = 1$.

---

[80] Ci si può chiedere, infatti, se questo esplicitare la y in funzione di x nell'espressione $G(y) - G(y_0) - F(x) + F(x_0) = 0$ dia luogo ad una ben individuata funzione $y(x)$: per chi conosce il teorema della funzione implicita, è noto che ciò accade se e solo se $\frac{\partial}{\partial y}(G(y) - G(y_0) - F(x) + F(x_0))(x_0, y_0) \neq 0$, ovvero se e solo se $G'(y_0) = \frac{g_1(y_0)}{g_2(y_0)} \neq 0$, ovvero se e solo se $g_1(y_0) \neq 0$. Se invece $g_1(y_0) = 0$, non potendo porre l'equazione in forma normale si può avere perdita di unicità; si noti che, comunque, da $f_1(x_0)g_2(y_0) = g_1(y_0)y'(x_0) = 0$ si deve avere $f_1(x_0) = 0$ oppure $g_2(y_0) = 0$. Ad esempio, l'equazione $2yy' = x$ con condizione iniziale $y(0) = 0$ ha le due soluzioni distinte $y = \pm x$.

[81] Il nome "autonome" indica il fatto che la variabile x non appare esplicitamente nell'equazione, ma solo implicitamente attraverso la sua funzione y.

[82] Il significato fisico di tali soluzioni costanti è quello di *equilibrio* del sistema dinamico.

(iii) Integriamo ora tra x_0 ed un generico x. Se $H(\eta)$ è una primitiva di $\frac{1}{g(\eta)}$, si ottiene $H(y(x)) - H(y_0) = x - x_0$.

(iv) Esplicitando $y(x)$ dall'ultima uguaglianza si ottiene la funzione φ cercata, e l'intervallo massimale I' in cui essa è definita è il più grande intervallo I' contenuto nel suo dominio naturale, contenente x_0 e tale che $g(\varphi(x)) \neq 0$ per ogni $x \in I'$.

Per le equazioni autonome non sarebbe restrittivo dare la condizione iniziale per $x_0 = 0$, ovvero dare $y(0) = y_0$ (si tratterebbe dunque di esplicitare $H(y(x)) - H(y_0) = x$): vale infatti il seguente fatto.

Proposizione 5.1.1. *L'insieme delle soluzioni di un'equazione autonoma $y' = g(y)$ è invariante per traslazioni nel dominio* (ovvero, se $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è una soluzione e $x_0 \in \mathbb{R}$, allora anche $\varphi_{x_0} : x_0 + I \to \mathbb{R}$ data da $\varphi_{x_0}(x) := \varphi(x - x_0)$ è soluzione).

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi : I \to \mathbb{R}$ sia soluzione di $y' = g(y)$, ovvero che $\varphi'(x) = g(\varphi(x))$ per ogni $x \in I$. Allora per ogni $x \in x_0 + I$ vale $\varphi'_{x_0}(x) = \varphi'(x - x_0) = g(\varphi(x - x_0)) = g(\varphi_{x_0}(x))$, ovvero anche $\varphi_{x_0} : x_0 + I \to \mathbb{R}$ è soluzione. □

Per risolvere le equazioni differenziali a variabili separabili in modo rapido è correntemente usato il **metodo dei differenziali separati**: si tratta di una rilettura formale e non del tutto giustificata, ma senza dubbio semplice ed efficace, del procedimento preciso descritto sopra.

(i) Si abbia l'equazione differenziale $f_2(x)g_1(y)\, y' = f_1(x)g_2(y)$ con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ (si assuma che $f_2(x_0) \neq 0$).

(ii) Se $g_2(y_0) = 0$, allora $y = y_0$ (costante) è soluzione del problema. Se invece $g_2(y_0) \neq 0$, si proceda come segue.

(iii) Pensando a $y' = \frac{dy}{dx}$ (rapporto formale dei differenziali dy e dx), si ricava $\frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$.

(iv) Facendo l'integrale *indefinito* di ambo i membri nelle rispettive variabili di integrazione, detta $G(y)$ una primitiva di $\frac{g_1(y)}{g_2(y)}$ e $F(x)$ una primitiva di $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ si ottiene

$$G(y) = F(x) + k$$

ove k è una costante da determinare.

(v) Imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ si ricava che $k = G(y_0) - F(x_0)$: dunque si arriva a

$$G(y) = F(x) + G(y_0) - F(x_0).$$

(vi) Esplicitando y dall'ultima uguaglianza si ottiene la soluzione $y(x)$ cercata.

Esaminiamo ora alcuni esempi.

Esempi. **(0)** Il caso base $y' = f(x)$ (in cui dunque $f_2(x) = g_1(y) = g_2(y) \equiv 1$) dà la soluzione $\varphi(x) = y_0 + F(x) - F(x_0)$, ove $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$. **(1)** Vediamo le due equazioni $y' = y$ e $y' = y^2$ proposte nella motivazione iniziale. Esse sono autonome (ovvero del tipo $y' = g(y)$), dunque possiamo applicare il procedimento semplificato. In entrambi i casi si ha $g(y) = 0$ se e solo se $y = 0$, dunque si trova la soluzione costante $y \equiv 0$. Nel primo caso una primitiva di $\frac{1}{g(\eta)} = \frac{1}{\eta}$ è $H(\eta) = \log|\eta|$, dunque se $y_0 \neq 0$ si ha $\log|y| - \log|y_0| = x - x_0$, da cui $\left|\frac{y}{y_0}\right| = x - x_0$, da cui $y = y_0 e^{x-x_0}$; nel secondo caso una primitiva di $\frac{1}{g(\eta)} = \frac{1}{\eta^2}$ è $H(\eta) = -\frac{1}{\eta}$, dunque se $y_0 \neq 0$ si ha $-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = x - x_0$, da cui $y = \frac{y_0}{1-y_0(x-x_0)}$. Si ritrovano in questo modo le famiglie di soluzioni $\{ke^x : k \in \mathbb{R}\}$ e $\{\frac{k}{1-kx} : k \in \mathbb{R}\}$ già annunciate in precedenza: infatti, imponendo che $\varphi(x_0) = y_0$, nel primo caso si trova $ke^{x_0} = y_0$ ovvero $k = y_0 e^{-x_0}$, da cui $ke^x = y_0 e^{-x_0} e^x = y_0 e^{x-x_0}$; nel secondo $\frac{k}{1-kx_0} = y_0$ ovvero $k = \frac{y_0}{1+x_0 y_0}$, da cui $\frac{k}{1-kx} = \frac{y_0}{1-y_0(x-x_0)}$. Nel primo caso si ha $I = \mathbb{R}$ (infatti $\varphi(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$ e non si annulla mai); nel secondo si ha $I =]-\infty, x_0 + \frac{1}{y_0}[$ se $y_0 > 0$, e $I =]x_0 + \frac{1}{y_0}, +\infty[$ se $y_0 < 0$ (infatti $\varphi(x)$ è definita per $x \neq x_0 + \frac{1}{y_0}$ e non si annulla mai, e gli intervalli I appena scritti sono quelli che contengono x_0 a seconda che $y_0 \gtrless 0$). Risolviamo le stesse equazioni usando il metodo dei differenziali. Da $y' = y$ si ricava $\frac{1}{y}\, dy = dx$, da cui $\log|y| = x + k$; la condizione $y(x_0) = y_0$ dà $k = \log|y_0| - x_0$, da cui $\log|y| = x + \log|y_0| - x_0$, ovvero $\log|y/y_0| = x - x_0$, ovvero $y(x) = y_0 e^{x-x_0}$. Invece, da $y' = y^2$ si ricava $\frac{1}{y^2}\, dy = dx$, da cui $\frac{1}{y} = -x + k$; la condizione $y(x_0) = y_0$ dà $k = x_0 + \frac{1}{y_0}$, da cui $\frac{1}{y} = -x + x_0 + \frac{1}{y_0}$, ovvero $y(x) = \frac{y_0}{1-y_0(x-x_0)}$. **(2)** Consideriamo un esempio non autonomo come $2xy\, y' = 1 - y^2$, in cui $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $g_1(y) = 2y$ e $g_2(y) = 1 - y^2$. (i) Le soluzioni costanti sono gli zeri di $g_2(y)$, ovvero $y \equiv -1$ e $y \equiv 1$. (ii) Essendo $f_2(0) = 0$ e $f_1(0) \neq 0$, ogni soluzione $\varphi(x)$ che abbia 0 ne suo dominio dovrà soddisfare $1 - \varphi(0)^2 = 0$, ovvero $\varphi(0) = \pm 1$. (iii) Siano ora $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq \pm 1$, e cerchiamo la soluzione $\varphi(x)$ tale che $\varphi(x_0) = y_0$. Dividendo ambo i membri per $x(1 - y^2)$ si ottiene l'equazione differenziale $\frac{2y}{1-y^2}\, y' = \frac{1}{x}$, valida solo in un intervallo I intorno di x_0 per ogni x del quale sia $x \neq 0$ e $\varphi(x) \neq \pm 1$. Si arriva dunque all'equazione $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{2\eta}{1-\eta^2} d\eta = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}\, dx$. (iv) Una primitiva di $\frac{2\eta}{1-\eta^2}$ è $G(\eta) = -\log|1 - \eta^2|$, ed una primitiva di $\frac{1}{x}$ è $F(x) = \log|x|$: si ottiene allora $-\log|1 - y^2| + \log|1 - {y_0}^2| = \log|x| - \log|x_0|$, ovvero $\log\left|\frac{1-{y_0}^2}{1-y^2}\right| = \log\left|\frac{x}{x_0}\right|$, ovvero $\left|\frac{1-{y_0}^2}{1-y^2}\right| = \left|\frac{x}{x_0}\right|$. (v) Esplicitando $y(x)$ dall'ultima uguaglianza si ottiene la funzione cercata $\varphi(x) = \pm\sqrt{1 - (1 - {y_0}^2)\frac{x}{x_0}}$ (ove si sceglie $\pm$ a seconda che sia $y_0 \gtrless 0$): si noti che $\varphi(x_0) = y_0$, come richiesto. Dall'espressione di $\varphi(x)$ si può calcolare l'intervallo massimale di definizione I (che dovrà essere un intervallo, e contenere x_0): basta infatti considerare la condizione di realtà della radice quadrata $1 - (1 - {y_0}^2)\frac{x}{x_0} \geq 0$, ovvero $\frac{x - x_0(1-{y_0}^2)}{x} \geq 0$. Se $x_0 > 0$ si ottiene $x \geq x_0(1 - {y_0}^2)$, e dunque $I =]x_0(1 - {y_0}^2), +\infty[$ se invece $x_0 < 0$ si ottiene $x \leq x_0(1 - {y_0}^2)$, e dunque $I =]-\infty, x_0(1 - {y_0}^2)[$ (si noti che, in entrambi i casi, vale senz'altro $x_0 \in I$). **(3)** Risolviamo finalmente il problema $y' = x \sin y$.

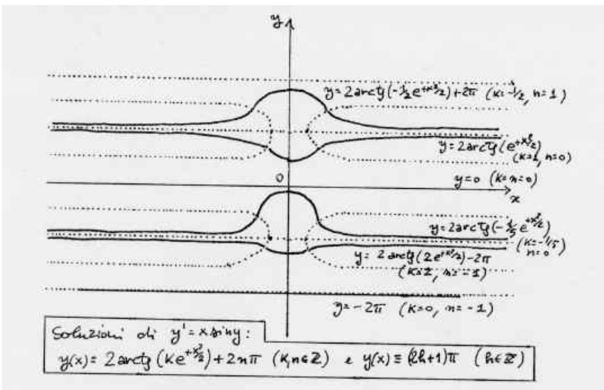

Figura 5.5: *L'integrale generale di $y' = x \sin y$ conferma le anticipazioni di pag. 160.*

Come già osservato, si ha esistenza ed unicità globale, e le soluzioni massimali sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Da $\sin y = 0$ ricaviamo le soluzioni costanti $y = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Dividendo e integrando, si trova poi $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{\sin\eta} d\eta = \int_{x_0}^{x} t\, dt$ da cui $\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{y_0}{2}}\right| = \frac{x^2 - x_0^2}{2}$, da cui $|\operatorname{tg}\frac{y}{2}| = |\operatorname{tg}\frac{y_0}{2}| e^{\frac{x^2-x_0^2}{2}}$, da cui (avendo $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ e

$\operatorname{tg}\frac{y_0}{2}$ lo stesso segno) $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \operatorname{tg}\frac{y_0}{2}e^{\frac{x^2-x_0^2}{2}}$, da cui $\frac{y}{2} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{y_0}{2}e^{\frac{x^2-x_0^2}{2}}) + n\pi$ (ove $n \in \mathbb{Z}$ è tale che $n\pi \le \frac{y_0}{2} \le (n+1)\pi$), ovvero finalmente $y(x) = 2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{y_0}{2}e^{\frac{x^2-x_0^2}{2}}) + 2n\pi$. Ponendo $k = \operatorname{tg}\frac{y_0}{2}e^{\frac{-x_0^2}{2}} \in \mathbb{R}$ si può scrivere l'integrale generale nella forma più pulita $y(x) = 2\operatorname{arctg}(ke^{\frac{x^2}{2}}) + 2n\pi$ con $k \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$ (ove $y(0) \equiv 2\operatorname{arctg} k \mod 2\pi$, e n è univocamente determinato da tale congruenza). Alcune soluzioni sono riportate nella Figura 5.5, che conferma tutte le anticipazioni di pag. 160. **(4)** Un modello di crescita classico è quello di *Malthus*, in cui si suppone che il numero di individui di una popolazione $\varphi(x)$ cresca col tempo x con velocità proporzionale alla popolazione stessa. Se $N > 0$ ed $M > 0$ indicano rispettivamente il tasso di natalità e mortalità della popolazione, si suppone che φ soddisfi all'equazione differenziale autonoma $y' = \gamma y$, ove $\gamma = N - M$ (tasso di incremento della popolazione, che può essere positivo, nullo o negativo a seconda che le nascite superino, uguaglino o siano meno delle morti). Se si suppone che $\varphi(0) = y_0$, procedendo come prima la soluzione risulta $\varphi(x) = y_0 e^{\gamma x}$: se $\gamma > 0$ (cioè se $N > M$) la popolazione cresce in modo esponenziale, se $\gamma = 0$ (cioè se $N = M$) la popolazione rimane stabile nel numero y_0, e se $\gamma < 0$ (cioè se $N < M$) la popolazione tende all'estinzione. Un modello un po' meno rozzo (specialmente nel caso di crescita) è il cosiddetto modello *logistico*, in cui si suppone che la velocità di crescita del numero degli individui sia proporzionale al numero stesso finché tale numero è basso, ma che poi l'aumento di popolazione provochi via via un'attenuazione della crescita, che deve diventare decrescita non appena il numero di individui superi una certa soglia critica S. Il nuovo modello, che raffina quello malthusiano, diventa dunque $y' = \gamma y(1 - \frac{y}{S})$, ove si suppone che $\gamma > 0$ (si noti che il modello di crescita di Malthus ritorni eliminando la soglia critica, ovvero passando al limite per $S \to +\infty$). Le soluzioni costanti sono $y \equiv 0$ e $y \equiv S$; supponendo che $y(0) = y_0$ e procedendo poi come detto in precedenza si arriva a $\log\left|\frac{y}{y-S}\right| = \gamma x + k_0$ (ove si pone $k_0 = \log\left|\frac{y_0}{y_0-S}\right|$), ovvero $\left|\frac{y}{y-S}\right| = e^{\gamma x + k_0}$. Se $y < 0$ oppure $y > S$ si ha $\frac{y}{y-S} > 0$, e dunque si ha $\frac{y}{y-S} = e^{\gamma x + k_0}$, da cui $\varphi(x) = S\frac{e^{\gamma x+k_0}}{e^{\gamma x+k_0}-1}$, definita per $x > -\frac{k_0}{\gamma}$ (se $y > S$, da cui $y_0 > S$, da cui $k_0 > 0$) o per $x < -\frac{k_0}{\gamma}$ (se $y < 0$, da cui $y_0 < 0$, da cui $k_0 < 0$). Se invece $0 < y < S$ si ha $\frac{y}{y-S} < 0$, e dunque si ha $\frac{y}{y-S} = -e^{\gamma x + k_0}$, da cui $\varphi(x) = S\frac{e^{\gamma x+k_0}}{e^{\gamma x+k_0}+1}$, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il modello biologicamente interessante è quest'ultimo, la cui curva $\varphi(x)$ è usualmente detta *sigmoide* (vedi Figura 5.6): si noti che, partendo da un dato iniziale $0 < y_0 < S$, il numero degli individui della popolazione evolve asintoticamente dal basso verso il valore S.

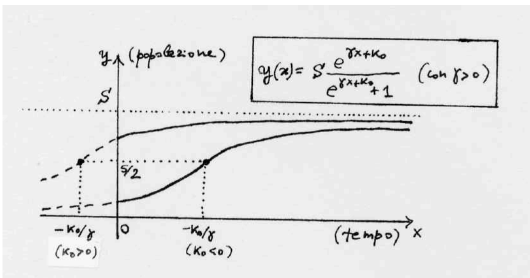

Figura 5.6: *La sigmoide del modello di crescita logistico*

5.2 Equazioni differenziali lineari

Si è già detto che un'equazione differenziale si dice *lineare* se essa appare come un polinomio di primo grado nelle derivate $y = y^{(0)}$, y', ... , $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ della funzione incognita $y(x)$. Ad esempio, le equazioni

$$y' + y\cos x = e^{x^2-1}, \qquad 2y'' + xy' + y\,\mathrm{tg}\,x = 1, \qquad y'''\sqrt{x^2-e^x} + x^2y' = x + y$$

sono tutte lineari (rispettivamente di ordine 1, 2 e 3), mentre non lo sono le seguenti:

$$yy' = x^2, \qquad y''\cos x - \sqrt{y'} + y = x^3 - \log x, \qquad xy''' = y^2 - \sin x.$$

La forma più generica di un'equazione differenziale lineare di ordine n è

$$\alpha_n(x)\,y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1(x)\,y' + \alpha_0(x)\,y = \beta(x), \tag{5.3}$$

ove $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, ..., $\alpha_{n-1}(x)$, $\alpha_n(x)$ e $\beta(x)$ sono funzioni continue definite in un certo intervallo aperto $U \subset \mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{C}$. Per studiare queste equazioni in modo produttivo, e in particolare per poter sfruttare i teoremi di esistenza ed unicità di Cauchy, conviene innanzitutto *porle in forma normale*: ciò richiede di dividere ambo i membri di (5.3) per $\alpha_n(x)$, e dunque di studiare l'equazione al di fuori dei punti di $T = \{x \in U : \alpha_n(x) = 0\}$: fatto ciò, il problema originario (5.3) viene portato nella forma normale

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x), \tag{5.4}$$

e dunque, d'ora in poi, *risolveremo* (5.4) *in un qualsiasi intervallo* $I \subset U \setminus T$, riservandoci poi di vedere se esistano soluzioni che si possono estendere a soluzioni definite anche su qualcuno dei punti di T.

Facciamo dunque riferimento ad un'equazione lineare in forma normale come (5.4). Se $b(x) \equiv 0$, l'equazione lineare si dice *omogenea*, altrimenti si dice *non omogenea* (o anche *affine*, o *completa*); ad ogni equazione affine si può dunque naturalmente associare un'omogenea ponendo $b(x) \equiv 0$:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0. \tag{5.5}$$

Siano S lo spazio delle soluzioni di (5.4) e S_0 lo spazio delle soluzioni di (5.5), ovvero gli insiemi delle funzioni $\varphi : I' \to \mathbb{C}$ derivabili n volte definite su un qualche intervallo $I' \subset I$ che soddisfano rispettivamente (5.4) e (5.5). Nella seguente proposizione, che esamina le strutture di S e S_0, appare palese la similitudine con le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari. (Denoteremo con $\mathcal{C}^{n-}(I,\mathbb{C})$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle funzioni $\varphi : I \to \mathbb{C}$ definite in I e derivabili n volte in I: si ha dunque $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^{n-}(I,\mathbb{C})$.)

Proposizione 5.2.1. *Si considerino le equazioni* (5.4) *e* (5.5).

(i) S_0 *è un* $\mathbb{C}$*-sottospazio vettoriale di* $\mathcal{C}^{n-}(I,\mathbb{C})$*, ovvero se* φ_1, φ_2 *sono due qualsiasi soluzioni di* (5.5) *e* λ, μ *sono due qualsiasi numeri complessi, anche* $\lambda\varphi_1(x)+\mu\varphi_2(x)$ *è soluzione di* (5.5). (In particolare, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (5.5) sono definite in I, massimo intervallo possibile.)

(ii) *Dato* $x_0 \in I$*, per ogni* $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ *esiste un'unica* $\varphi_{\vec{\alpha}}(x) \in S_0$ *soluzione del problema di Cauchy con le condizioni iniziali* $\varphi_{\vec{\alpha}}(x_0) = \alpha_0$*,* $\varphi'_{\vec{\alpha}}(x_0) = \alpha_1$*, ...,* $\varphi^{(n-1)}_{\vec{\alpha}}(x_0) = \alpha_{n-1}$*. In particolare* S_0 *è un* $\mathbb{C}$*-sottospazio vettoriale di dimensione* n *di* $\mathcal{C}^{n-}(I,\mathbb{C})$*, ovvero vi sono* n *soluzioni indipendenti* $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) \in S_0$ *tali che*

$$S_0 = \{\lambda_1\varphi_1(x) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(x) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\}.$$

(iii) (Principio di sovrapposizione) *Se* $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$*, e* $\widetilde{\varphi}_1(x)$ (risp. $\widetilde{\varphi}_2(x)$) *è una soluzione di* (5.4) *ove* $b(x)$ *sia sostituito da* $b_1(x)$ (risp. da $b_2(x)$) *allora* $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}_1(x) + \widetilde{\varphi}_2(x)$ *è una soluzione di* (5.4).

(iv) *Se* $\widetilde{\varphi}(x) \in S$ *è una* qualsiasi *soluzione particolare di* (5.4)*, allora vale*

$$S = S_0 + \widetilde{\varphi}(x) = \{\lambda_1\varphi_1(x) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(x) + \widetilde{\varphi}(x) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}\} :$$

S è un sottospazio affine di $\mathcal{C}^{n-}(I,\mathbb{C})$ ottenuto traslando il sottospazio vettoriale S_0.

Dimostrazione. Grazie alla linearità della derivazione, è immediato verificare che somme e multipli scalari di soluzioni di (5.5) sono ancora soluzioni di (5.5): in altre parole, che S_0 ha una struttura di $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Il resto dell'affermazione (i) e l'affermazione (ii) li accettiamo senza dimostrazione. Invece le affermazioni (iii) e (iv) sono facili conseguenze della linearità della derivazione. □

Per dare questi importanti risultati di struttura delle soluzioni si è preferito operare nel caso generale delle equazioni differenziali lineari. A questo punto, però, è necessario dire che non esistono formule risolutive generali, ma solo metodi validi per i casi più semplici (come le equazioni differenziali lineari del primo ordine di qualsiasi tipo, e le equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti) e per alcuni altri casi particolari. Ci occupiamo allora dei due suddetti casi semplici.

Equazioni differenziali lineari del primo ordine Studiamo dunque l'equazione

$$a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x), \tag{5.6}$$

ove $a_0(x)$, $a_1(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue definite in un intervallo I ed a valori in $\mathbb{C}$.

(i) Iniziamo escludendo temporaneamente i punti di $T = \{x \in I : a_1(x) = 0\}$, e risolviamo perciò il problema *separatamente* in ciascuno degli intervalli che compongono $I \setminus T$. Possiamo dunque dividere ambo i membri dell'equazione per $a_1(x)$, ottenendo la forma normale (ove $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $q(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)}$)

$$y' + p(x)y = q(x).$$

(ii) Sia $P(x)$ una primitiva di $p(x)$, e moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione in forma normale per la funzione (mai nulla) $e^{P(x)}$: notando che $e^{P(x)}(y' + p(x)y) = (e^{P(x)}\,y)'$, si ottiene $(e^{P(x)}\,y)' = e^{P(x)}q(x)$, da cui, integrando ambo i membri rispetto ad x e dividendo per $e^{P(x)}$ si ottiene la forma generale delle soluzioni:

$$y(x) = e^{-P(x)} \left(\int e^{P(x)}q(x)\,dx\, + k \right), \qquad\qquad k \in \mathbb{C}.$$

Si noti che, come atteso, lo spazio delle soluzioni è lo spazio affine ottenuto traslando lo spazio vettoriale $\mathbb{C}e^{-P(x)}$ di dimensione uno (soluzioni dell'equazione omogenea associata) con la soluzione particolare $e^{-P(x)} \int e^{P(x)}q(x)\,dx$ dell'equazione completa (5.6).

(iii) Se si cerca la soluzione del problema di Cauchy $\varphi(x)$ tale che $\varphi(x_0) = y_0 \in \mathbb{C}$, naturalmente si può inserire tale condizione nell'espressione generale appena trovata, e determinare il corrispondente valore di k. Altrimenti si può ripartire dall'uguaglianza $(e^{P(x)}\,y)' = e^{P(x)}q(x)$: integrando tra x_0 ed un generico x si ottiene $e^{P(x)}\,\varphi(x) - e^{P(x_0)}\,y_0 = \int_{x_0}^{x} e^{P(t)}q(t)\,dt$, da cui

$$\varphi(x) = e^{-P(x)} \left(e^{P(x_0)}\,y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{P(t)}q(t)\,dt \right).$$

(iv) Si cerca infine di "recuperare" i punti di T, chiedendosi se alcune delle soluzioni trovate precedentemente (che, si ripete, valgono *separatamente* in ciascuno degli intervalli che compongono $I \setminus T$: per ognuno di essi la costante k sarà indipendente da quelle degli altri) possano essere estese a delle funzioni derivabili in qualcuno dei punti di T. Talvolta, per un'opportuna scelta delle costanti in ciascuno degli intervalli di $I \setminus T$, tale estensione può essere ottenuta.

Esempi. **(1)** Risolviamo l'equazione $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ con condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = -3$. Si tratta di un'equazione nella forma normale $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = \cos x$ e $q(x) = \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x\cos x$: le soluzioni saranno dunque definite su tutto $\mathbb{R}$, e costituiranno un sottospazio affine di dimensione uno in $\mathcal{C}^{1-}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \sin x$; calcoliamo poi $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\,dx$. Con la sostituzione $t = \sin x$ otteniamo $\int te^t\,dt$, che integrato per parti dà $(t-1)e^t$: ne ricaviamo $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)}q(x)\,dx\, + k) = \sin x - 1 + ke^{-\sin x}$ con $k \in \mathbb{C}$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene $1 - 1 + ke^{-1} = -3$, da cui $k = -3e$, ovvero la soluzione $\varphi(x) = \sin x - 1 - 3e\,e^{-\sin x} = \sin x - 1 - 3e^{-\sin x+1}$. Ricavando da subito la soluzione del problema di Cauchy si ha $\varphi(x) = e^{-P(x)}(e^{P(x_0)}\,y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{P(t)}q(t)\,dt)$ (con $x_0 = \frac{\pi}{2}$ e $y_0 = -3$), ovvero nuovamente $\varphi(x) = e^{-\sin x}(e(-3) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{\sin t}\sin t\cos t\,dt) = e^{-\sin x}(-3e + [(\sin t - 1)e^{\sin t}|_{\frac{\pi}{2}}^{x}) = e^{-\sin x}(-3e + (\sin x - 1)e^{\sin x}) = \sin x - 1 - 3e^{-\sin x+1}$. **(2)** Risolviamo l'equazione $xy' + y = xe^x$. Per portare l'equazione in forma normale dobbiamo dividere per x, dunque iniziamo risolvendo il problema separatamente in $x < 0$ e in $x > 0$. Si ottiene dunque $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = e^x$; una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \log|x|$, e dunque $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)}q(x)\,dx\, + k) = \frac{1}{|x|}(\int |x|e^x dx + k) = \frac{1}{x}(\int xe^x dx + k) = \frac{(x-1)e^x+k}{x}$, con $k \in \mathbb{C}$. Ribadiamo che tale risoluzione vale *separatamente in $x < 0$ e $x > 0$*, dunque l'espressione della soluzione generale su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è $y(x) =$

$\frac{(x-1)e^x+k_-}{x}$ (per $x<0$) e $y(x)=\frac{(x-1)e^x+k_+}{x}$ (per $x>0$) con $k_-,k_+\in\mathbb{C}$ costanti da determinare indipendentemente l'una dall'altra. Ci chiediamo ora se esista qualche soluzione dell'equazione definita su tutto $\mathbb{R}$: necessariamente tale soluzione dovrà essere del tipo appena descritto quando ristretta a $x>0$ oppure a $x<0$, ma dovrà essere derivabile anche su tutto $\mathbb{R}$. Ora, se $k_+\neq 1$ le soluzioni per $x>0$ divergono a ∞ quando $x\to 0^+$, mentre la soluzione con $k_+=1$ tende a 0 (come si vede subito ad esempio con de l'Hôpital); lo stesso accade per le soluzioni per $x<0$. Dunque c'è solo un candidato per essere soluzione globale dell'equazione, ed è la funzione $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $\varphi(x)=\frac{(x-1)e^x+1}{x}$ (per $x\neq 0$) e $\varphi(0)=0$. Abbiamo appena visto che φ è continua in 0 (e dunque continua su $\mathbb{R}$); ci resta solo da controllare se φ sia anche derivabile in 0 (e dunque su $\mathbb{R}$), e, in caso affermativo, se ϕ soddisfi l'equazione anche per $x=0$. Ora, si ha $\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$, e tale limite è finito e vale $\frac{1}{2}$ (anche ciò si vede subito con de l'Hôpital); dunque φ è derivabile in 0 con $\varphi'(0)=\frac{1}{2}$, e controllando se vale $x\varphi'(x)+\varphi(x)=xe^x$ in $x=0$ si ottiene $0=0$, vero. Dunque φ è l'unica soluzione globale dell'equazione differenziale proposta. **(3)** Risolviamo l'equazione $y'\cos x-y\sin x=1$. Anche qui, per portare l'equazione in forma normale dobbiamo dividere per $\cos x$, dunque iniziamo risolvendo il problema separatamente in ciascuno degli intervalli $I_m=]\frac{\pi}{2}+m\pi,\frac{\pi}{2}+(m+1)\pi[$ per $m\in\mathbb{Z}$. Si ottiene allora $y'+p(x)y=q(x)$ con $p(x)=-\operatorname{tg}x$ e $q(x)=\frac{1}{\cos x}$; una primitiva di $p(x)$ è $P(x)=\log|\cos x|$, e dunque (notando che $|\cos x|=(-1)^{m+1}\cos x$ in I_m) si calcola $y(x)=e^{-P(x)}(\int e^{P(x)}q(x)\,dx+k_m)=\frac{1}{|\cos x|}(\int|\cos x|\frac{1}{\cos x}dx+k)=\frac{1}{(-1)^{m+1}\cos x}(\int(-1)^{m+1}\cos x\frac{1}{\cos x}dx+k_m)=\frac{x+k_m}{\cos x}$, con $k_m\in\mathbb{C}$ (ogni costante essendo indipendente da quelle degli altri intervalli). Anche in questo caso ci chiediamo se esista qualche soluzione dell'equazione definita su tutto $\mathbb{R}$, soluzione che necessariamente dovrà essere del tipo appena descritto quando ristretta ad ognuno degli intervalli I_m, e dovrà essere derivabile anche su tutto $\mathbb{R}$. Ma in questo caso osserviamo che, comunque si scelga la costante k_m, tutte le soluzioni dell'equazione sull'intervallo I_m divergeranno quando x tende ad almeno uno dei due estremi di I_m (più precisamente, se $k_m\neq-\frac{\pi}{2}+m\pi,-\frac{\pi}{2}+(m+1)\pi$ le soluzioni divergeranno in entrambi i limiti, e se $k_m=-\frac{\pi}{2}+m\pi$ (risp. $k_m=-\frac{\pi}{2}+(m+1)\pi$ la corrispondente soluzione divergerà quando x tende a $(\frac{\pi}{2}+(m+1)\pi)^-$ (risp. quando x tende a $(\frac{\pi}{2}+m\pi)^+$). Dunque, in questo caso non c'è alcuna speranza di trovare soluzioni globali dell'equazione. Vediamo se, almeno, si possono trovare delle soluzioni sulla saldatura di due intervalli. Ad esempio, saldando I_{-1} e I_0 si ha l'intervallo $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$, e possiamo considerare la funzione $\varphi:I\to\mathbb{R}$ data da $\varphi(x)=\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$ (se $x\neq\frac{\pi}{2}$) e $\varphi(\frac{\pi}{2})=-1$; essa è continua (come si verifica subito con de l'Hôpital), ed è anche derivabile essendo $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\varphi(x)-\varphi(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}+1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{t}{\sin t}+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t^3/6}{t^2}=0$; inoltre essa soddisfa l'equazione differenziale in $\frac{\pi}{2}$, essendo $\varphi'(\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}-\varphi(\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti Studiamo ora un'equazione differenziale lineare del secondo ordine del tipo

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=b(x), \tag{5.7}$$

ove a_0, a_1 e a_2 sono costanti in $\mathbb{C}$ (si supporrà che $a_2\neq 0$, altrimenti si ricade in un'equazione lineare del primo ordine) e $b(x)$ è una funzione continua definita in un intervallo I ed a valori in $\mathbb{C}$.

(i) Iniziamo cercando le soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=0, \tag{5.8}$$

che, come sappiamo dalla Proposizione 5.2.1, saranno un sottospazio vettoriale di dimensione due di $\mathcal{C}^{2-}(I,\mathbb{R})$.

Siano $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ le soluzioni dell'*equazione caratteristica* $a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0$. Ci sono tre possibilità.

(a) α_1 e α_2 sono soluzioni reali distinte. Allora

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha_1 x}, \qquad\qquad \varphi_2(x) = e^{\alpha_2 x}$$

sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.

(b) $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$ (soluzione reale doppia). Allora

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad\qquad \varphi_2(x) = xe^{\alpha x}$$

sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.

(c) α_1 e α_2 sono soluzioni complesse coniugate e distinte, dunque $\alpha_1 = u + iv$ e $\alpha_2 = u - iv$ con $v \neq 0$. Allora

$$\varphi_1(x) = e^{ux}\cos vx, \qquad\qquad \varphi_2(x) = e^{ux}\sin vx$$

sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea.

La verifica nei tre casi è diretta.[83] Lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ sarà dunque

$$S_0 = \{h\,\varphi_1(x) + k\,\varphi_2(x) : h, k \in \mathbb{C}\},$$

che è un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di dimensione due in $\mathcal{C}^{2-}(I,\mathbb{C})$.

(ii) Dobbiamo cercare ora una soluzione particolare $\widetilde{\varphi}(x)$ dell'equazione completa (5.7). Non forniremo la regola generale, limitandoci ad esporre il *metodo dei coefficienti indeterminati* che serve a trattare il caso particolare (ma frequente e importante) in cui

$$b(x) = e^{sx}(A(x)\cos tx + B(x)\sin tx)$$

ove $s, t \in \mathbb{R}$ (eventualmente nulli) e $A(x), B(x)$ polinomi in x (eventualmente costanti).[84] Si può allora mostrare che se $s + it$ è soluzione dell'equazione caratteristica di

[83] Che le suddette coppie di funzioni $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ siano linearmente indipendenti è chiaro (se fossero linearmente dipendenti, esisterebbero $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tali che $\lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x) = 0$ per ogni $x \in I$, ma ciò non è vero in nessuno dei tre casi). Basta dunque verificare che esse siano effettivamente soluzioni. Ad esempio per $\varphi_1(x) = e^{ux}\cos vx$ nel caso (c) si ha $\varphi_1'(x) = e^{ux}(u\cos vx - v\sin vx)$ e $\varphi_1''(x) = e^{ux}((u^2 - v^2)\cos vx - 2uv\sin vx)$, e dunque $a_2\varphi_1''(x) + a_1\varphi_1'(x) + a_0\varphi_1(x) = e^{ux}((a_2(u^2 - v^2) + a_1u + a_0)\cos vx + (-2a_2uv - a_1v)\sin vx)$: ma essendo $\alpha = u + iv$ soluzione dell'equazione caratteristica $a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0$ si ha $0 = a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = a_2(u^2 - v^2 + 2iuv) + a_1(u + iv) + a_0 = (a_2(u^2 - v^2) + a_1u + a_0) + i(2a_2uv + a_1v)$, da cui $a_2(u^2 - v^2) + a_1u + a_0 = 2a_2uv + a_1v = 0$; ne ricaviamo che $a_2\varphi_1''(x) + a_1\varphi_1'(x) + a_0\varphi_1(x) = 0$, ovvero che $\varphi_1(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata, come affermato.

[84] Si tenga comunque presente che si può usare il principio di sovrapposizione (Proposizione 5.2.1(iii)): se ad esempio $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$ con $b_1(x)$ e $b_2(x)$ della forma suddetta, si possono trovare soluzioni particolari per l'equazione completa con $b_1(x)$ e con $b_2(x)$, per poi sommarle.

molteplicità p (dunque $0 \le p \le 2$) ed i polinomi $A(x)$ e $B(x)$ hanno grado $\le d$, si può trovare una soluzione particolare della forma

$$\widetilde{\varphi}(x) = x^p e^{sx}(M(x)\cos tx + N(x)\sin tx)$$

ove $M(x)$ e $N(x)$ sono polinomi di grado $\le d$ da determinare.

(iii) Per quanto visto, lo spazio delle soluzioni dell'equazione completa sarà dunque

$$S = S_0 + \widetilde{\varphi}(x) = \{h\,\varphi_1(x) + k\,\varphi_2(x) + \widetilde{\varphi}(x) : h, k \in \mathbb{C}\},$$

che è un $\mathbb{C}$-sottospazio affine di dimensione due in $\mathcal{C}^{2-}(I, \mathbb{C})$.

(iv) Il problema di Cauchy, in questo caso, è l'assegnazione delle condizioni iniziali $\varphi(x_0) = y_0$ e $\varphi'(x_0) = y_1$, con $x_0 \in I$ e $y_0, y_1 \in \mathbb{C}$: basterà inserire tali condizioni nell'espressione generale appena trovata per determinare il corrispondente valore della coppia (h, k).

Esempi. **(1)** Risolviamo l'equazione $y'' - 4y' + 3y = 4xe^x$ con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = -3$. L'equazione caratteristica $\xi^2 - 4\xi + 3 = 0$ ha soluzioni 1 e 3, dunque lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea associata è $S_0 = \{a\,e^x + b\,e^{3x} : a, b \in \mathbb{C}\}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Essendo $\xi = 1$ una soluzione di molteplicità $p = 1$ dell'equazione caratteristica, il metodo dei coefficienti indeterminati suggerisce di provare con $\widetilde{\varphi}(x) = x(\alpha x + \beta)e^x$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ da determinare. Si ha allora $\widetilde{\varphi}'(x) = (\alpha x^2 + (2\alpha + \beta)x + \beta)e^x$ e $\widetilde{\varphi}''(x) = (\alpha x^2 + (4\alpha + \beta)x + 2(\alpha + \beta))e^x$, da cui si ricava $\widetilde{\varphi}''(x) - 4\widetilde{\varphi}'(x) + 3\widetilde{\varphi}(x) = (-4\alpha x + 2(\alpha - \beta))e^x$. Ponendo quest'ultima espressione uguale a $4xe^x$ si ricava $-4\alpha = 4$ e $2(\alpha - \beta) = 0$, da cui $\alpha = \beta = -1$. La soluzione particolare è dunque $\widetilde{\varphi}(x) = -x(x+1)e^x$, e dunque lo spazio affine delle soluzioni del sistema completo è $S = \{(a - x(x+1))e^x + b\,e^{3x} : a, b \in \mathbb{C}\}$. Imponiamo ora le condizioni iniziali: da $\varphi(0) = a + b = 0$ si ricava $b = -a$, e dunque $\phi(x) = (a - x(x+1))e^x - a\,e^{3x}$ con $a \in \mathbb{C}$ da determinare; derivando si ha $\phi'(x) = (a - 1 - x(x+3))e^x - 3a\,e^{3x}$, e dunque $\phi'(0) = a - 1 - 3a = -2a - 1$, che posto uguale a -3 dà $a = 1$. La soluzione cercata è pertanto $\phi(x) = -(x^2 + x - 1)e^x - e^{3x}$. **(2)** Sia $r \in \mathbb{R}$, e consideriamo l'equazione $y'' - 2ry' + r^2 y = e^{-3x} + \cos 2x$. L'equazione caratteristica $\xi^2 - 2r\xi + r^2 = 0$ ha soluzioni doppia r, dunque lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea associata è $S_0 = \{a\,e^{rx} + bx\,e^{rx} : a, b \in \mathbb{C}\} = \{(a + bx)e^{rx} : a, b \in \mathbb{C}\}$. Per una soluzione particolare dell'equazione completa sfruttiamo il principio di sovrapposizione, iniziando da $b_1(x) = e^{-3x}$. Se $r \ne -3$ (dunque -3 ha molteplicità $p = 0$) possiamo provare con $\widetilde{\varphi}_1(x) = \alpha e^{-3x}$ ove $\alpha \in \mathbb{C}$ è da determinare: essendo $\widetilde{\varphi}_1'(x) = -3\alpha e^{-3x}$ e $\widetilde{\varphi}_1''(x) = 9\alpha e^{-3x}$ si ricava $\widetilde{\varphi}_1''(x) - 2r\widetilde{\varphi}_1'(x) + r^2\widetilde{\varphi}_1(x) = \alpha(r+3)^2 e^{-3x}$, e ponendo uguale a e^{-3x} si ricava $\alpha = \frac{1}{(r+3)^2}$. Se invece $r = -3$ (caso in cui -3 ha molteplicità $p = 2$) proviamo $\widetilde{\varphi}_1(x) = \beta x^2 e^{-3x}$ con $\beta \in \mathbb{C}$ da determinare: da $\widetilde{\varphi}_1'(x) = \beta(2x - 3x^2)e^{-3x}$ e $\widetilde{\varphi}_1''(x) = \beta(2 - 12x + 9x^2)e^{-3x}$ si ricava $\widetilde{\varphi}_1''(x) + 6\widetilde{\varphi}_1'(x) + 9\widetilde{\varphi}_1(x) = 2\beta e^{-3x}$, e ponendo uguale a e^{-3x} si ricava $\beta = \frac{1}{2}$. Passiamo ora a $b_2(x) = \cos 2x$: poiché $2i$ certamente non è soluzione dell'equazione caratteristica (infatti si è supposto che $r \in \mathbb{R}$) una soluzione particolare sarà della forma $\widetilde{\varphi}_2(x) = \alpha\cos 2x + \beta\sin 2x$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ da determinare. Da $\widetilde{\varphi}_2'(x) = 2\beta\cos 2x - 2\alpha\sin 2x$ e $\widetilde{\varphi}_2''(x) = -4\alpha\cos 2x - 4\beta\sin 2x$ si ricava $\widetilde{\varphi}_2''(x) - 2r\widetilde{\varphi}_2'(x) + r^2\widetilde{\varphi}_2(x) = ((r^2 - 4)\alpha - 4r\beta)\cos 2x + (4r\alpha + (r^2 - 4)\beta)\sin 2x$, che posto uguale a $\cos 2x$ dà il sistema $(r^2 - 4)\alpha - 4r\beta = 1$ e $4r\alpha + (r^2 - 4)\beta = 0$, con soluzione $\alpha = \frac{r^2 - 4}{r^4 + 16}$ e $\beta = -\frac{4r}{r^4 + 16}$: si ottiene finalmente $\widetilde{\varphi}_2(x) = \frac{1}{r^4 + 16}((r^2 - 4)\cos 2x - 4r\sin 2x)$. Ricapitolando, lo spazio affine delle soluzioni del sistema completo è $S = \{(a + bx)e^{rx} + \widetilde{\varphi}_1(x) + \widetilde{\varphi}_2(x) : a, b \in \mathbb{C}\}$, ove $\widetilde{\varphi}_1(x)$ e $\widetilde{\varphi}_2(x)$ sono le funzioni appena calcolate. **(3)** Consideriamo l'equazione $y'' + 2y' + 5y = e^x \cos 2x + 5x$. L'equazione caratteristica $\xi^2 + 2\xi + 5 = 0$ ha soluzioni complesse coniugate $-1 \pm 2i$, dunque lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea associata è $S_0 = \{a\,e^{-x} \cos 2x + be^{-x} \sin 2x : a, b \in \mathbb{C}\} = \{e^{-x}(a \cos 2x + b \sin 2x) : a, b \in \mathbb{C}\}$. Per una soluzione particolare dell'equazione completa sfruttiamo ancora una volta il principio di sovrapposizione, iniziando da $b_1(x) = e^{-x} \cos 2x$. In questo caso $-1 + 2i$ è soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità $p = 1$, e dunque una soluzione particolare dell'equazione completa con $b_1(x)$ è $\widetilde{\varphi}_1(x) = xe^{-x}(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ da determinare. Procedendo come in precedenza si ottiene $a = 0$ e $b = \frac{1}{4}$, dunque $\widetilde{\varphi}_1(x) = \frac{1}{4}xe^{-x} \sin 2x$. Passando a $b_2(x) = 5x$, cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\widetilde{\varphi}_2(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ da determinare: i conti danno $\alpha = 1$ e $\beta = -\frac{2}{5}$, da cui $\widetilde{\varphi}_2(x) = x - \frac{2}{5}$. Lo spazio affine delle soluzioni del sistema completo è dunque $S = \{e^{-x}(a \cos 2x + (b + \frac{x}{4}) \sin 2x) + x - \frac{2}{5} : a, b \in \mathbb{C}\}$.

La dinamica newtoniana del punto materiale. Gli esempi più importanti di equazioni differenziali lineari scalari del secondo ordine a coefficienti costanti vengono dalla *dinamica del punto materiale.* Iniziamo, per semplicità, dal caso di punto materiale vincolato con un solo grado di libertà: si pensi, per esempio, ad un punto materiale vincolato a muoversi su una retta. Sia $y(t)$ la funzione (detta *legge oraria del moto*) che descrive la posizione del punto sulla retta tramite la sua coordinata ascissa y all'evolvere del tempo t; nell'ipotesi di sufficiente regolarità, la funzione derivata prima $y'(t)$ descrive allora la *velocità* (rapidità di variazione della posizione) del punto, e la funzione derivata seconda $y''(t)$ l'*accelerazione* (rapidità di variazione della velocità) del punto.

Se il punto ha massa m e su di esso agisce una forza unidimensionale $F(t, y, y')$ (dipendente in generale dalla posizione y del punto, dalla sua velocità y' e magari anche esplicitamente dal tempo t), la legge di Newton afferma che il moto $y(t)$ obbedisce alla legge

$$my'' = F(t, y, y') :$$

in altre parole, *il punto subisce un'accelerazione direttamente proporzionale alla forza F cui è soggetto e inversamente proporzionale alla sua massa m.*

Tra le forze unidimensionali più comuni possiamo ricordare le seguenti:

- La forza di tipo *gravitazionale* $-mg$ (pensando ad esempio ad una retta verticale e ad una accelerazione di gravità g diretta nel verso negativo delle y).
- La forza di tipo *elastico* $-k(y - y_0)$, data da una molla di costante elastica $k > 0$ con lunghezza a riposo nulla, imperniata in y_0. Si noti che questa forza dipende solo dalle caratteristiche della molla e dalla posizione del punto; essa tira tanto più forte quanto più il punto si allontana da y_0, e sempre per far ritornare il punto verso il perno y_0.

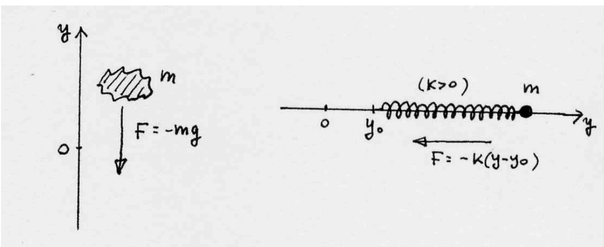

Figura 5.7: *Forza peso e forza elastica*

- La forza di tipo *attrito viscoso* $-\nu y'$, che simula la resistenza opposta al moto da un fluido nel quale il moto avviene: si intende che il coefficiente $\nu > 0$ è tanto più grande quanto più viscoso è il fluido. Si noti che la forza è proporzionale alla velocità del punto (quanto più il punto corre, tanta più resistenza il fluido oppone al suo moto).
- La forza di tipo *attrito radente*, che simula la resistenza generata da una possibile scabrosità della retta su cui il moto avviene, o vorrebbe avvenire. Ad esempio, se si pensa ad una retta scabrosa contro la quale il punto materiale, ancora fermo, sia spinto perpendicolarmente da una certa forza $f(x, y, y')$,[85] la forza di attrito radente *statico* si può descrivere come una forza di intensità $\mu_s|f|$ (proporzionale all'intensità $|f|$ della forza perpendicolare alla retta, con un coefficiente di attrito *statico* $\mu_s > 0$ che sarà tanto più grande quanto più scabrosa è la retta). Tale forza tende ad impedire che il punto si metta in movimento fino al momento in cui sul punto non agisca un'altra forza parallela alla retta che la superi in intensità. Non appena questo accade, la forza diventa di attrito *dinamico*, e si può descrivere come $-(\operatorname{sign} y')\mu_d|f|$: ovvero, essa ha ancora intensità proporzionale all'intensità $|f|$ della forza, con un coefficiente di attrito *dinamico* $\mu_d > 0$, inferiore al coefficiente di attrito statico μ_s, ed è diretta sempre in verso opposto rispetto al verso in cui sta avvenendo il moto: è ben noto che l'attrito radente tende comunque a frenare il moto. [86]

Essendo l'equazione del secondo ordine, il problema di Cauchy si concretizzerà assegnando la posizione $y(t_0) = y_0$ e la velocità $y'(t_0) = v$ in un certo istante t_0 (tipicamente nell'istante iniziale $t_0 = 0$).

Esempi. **(0)** Se sul punto non agisce nessuna forza, l'equazione dà $my'' = 0$, ovvero $y'' = 0$, da cui (integrando due volte) $y(t) = at + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare assegnando le condizioni iniziali. Se, ad esempio, nell'istante $t = 0$ il punto si trovava in y_0 con velocità v_0, si trova $y(0) = b = y_0$ e $y'(0) = a = v_0$, da cui $y(t) = y_0 + v_0 t$: il punto evolve dalla posizione y_0 con velocità costante v_0 (in ossequio al Primo Principio della Dinamica: *un corpo non sottoposto ad alcuna forza resta in quiete o si muove con moto rettilineo uniforme*). **(1)** Si consideri il caso in cui sul punto agisca solo la forza di gravità: il problema è dunque $my'' = -mg$, ovvero $y'' = -g$ (accelerazione costante g): esso si risolve immediatamente con due integrazioni, dando $y(t) = a + bt - \frac{1}{2}gt^2$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ sono da determinare assegnando le condizioni iniziali. Se ad esempio richiediamo che $y(0) = y_0$ (posizione iniziale) e $y'(0) = v$ (velocità iniziale) si ottiene $y(0) = a = y_0$ e $y'(0) = b = v$, da cui la soluzione $y(t) = y_0 + vt - \frac{1}{2}gt^2$ (espressione tipica del moto uniformemente accelerato). **(2)** Si consideri il caso in cui sul punto agisca solo una forza elastica imperniata in 0: il problema diventa $my'' = -ky$, ovvero $y'' + \omega^2 y = 0$ ove si è posto $\omega = \sqrt{k/m}$ (detta *pulsazione propria* del sistema molla-massa): si tratta di un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\xi^2 + \omega^2 = 0$ ha le radici complesse coniugate $\pm i\omega$: ne ricaviamo che $y(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ove $a, b \in \mathbb{R}$ sono da determinare assegnando le condizioni iniziali. Se ad esempio supponiamo che $y(0) = y_0$ e $y'(0) = 0$ si ha $y(0) = a = y_0$ e $y'(0) = a\omega \cdot 0 + b\omega = 0$, da cui $b = 0$: la soluzione è $y(t) = y_0 \cos\omega t$ (il punto inizia ad oscillare tra le posizioni y_0 e $-y_0$ con un *periodo* temporale pari a $\frac{2\pi}{\omega}$. **(3)** Consideriamo il caso più generale in cui il punto sia soggetto contemporaneamente alle forze gravitazionale, elastica e viscosa. (Nella Figura 5.8 si rappresenta visivamente il caso in cui la forza gravitazionale non influisce, ovvero $g = 0$ nella discussione che segue.) Il problema diventa $my'' = -mg - ky - \nu y'$, ovvero $y'' + 2\eta y' + \omega^2 y = -g$ ove $\eta := \nu/2m > 0$: si tratta di un'equazione lineare non omogenea a coefficienti costanti. Una soluzione dell'equazione non omogenea si vede subito essere la costante $\widetilde{y}(t) \equiv -mg/k$; occupiamoci invece delle radici dell'equazione caratteristica $\xi^2 + 2\eta\xi + \omega^2 = 0$. Poniamo per comodità $\sigma = \sqrt{|\eta^2 - \omega^2|}$ (vale perciò $0 \le \sigma \le \max\{\eta, \omega\}$). Se $\eta > \omega$ (viscosità forte, o molla debole) si ottengono le due soluzioni reali $-\eta \pm \sigma$ (si noti che sono entrambe sono < 0): dunque in questo caso la soluzione generale è

$$y(t) = ae^{-(\eta-\sigma)t} + be^{-(\eta+\sigma)t} - mg/k, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

[85] Si pensi ad esempio ad una retta posta orizzontalmente nel campo gravitazionale terrestre, in cui dunque sul punto materiale agisce la forza peso $f = mg$ diretta perpendicolarmente alla retta stessa, verso il basso.

[86] Si immagini un masso rettangolare posto su un piano di cemento: se si vuole farlo strisciare tirandolo con una corda, si dovrà prima di tutto vincere la forza di attrito statico che lo farebbe stare fermo; dopodiché, quando il masso è stato smosso, resta comunque una forza di attrito che si oppone al moto generato con la forza impressa tirando la corda.

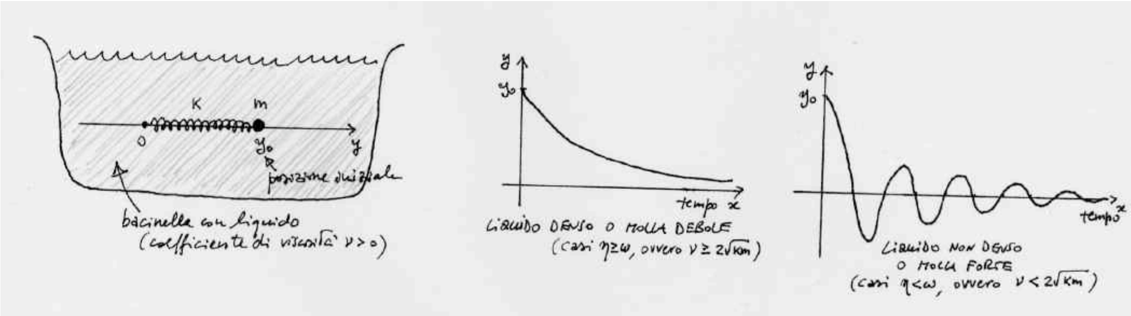

Figura 5.8: *Oscillazioni smorzate (moto da forza elastica in mezzo viscoso)*

Si noti che per $t \to +\infty$ il moto dato dalla soluzione dell'omogenea tende sempre a spegnersi, e la posizione tende all'equilibrio $y \equiv -mg/k$. Se $\eta = \omega$ (viscosità e molla si equivalgono) si ottiene la soluzione reale negativa doppia $\alpha = -\eta < 0$, con soluzione generale

$$y(t) = e^{-\eta t}(a + bt) - mg/k, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

e vale ancora il discorso precedente. Se infine $\eta < \omega$ (viscosità scarsa, o molla forte) si ottengono le due soluzioni complesse coniugate $-\eta \pm i\sigma$: la soluzione generale diventa

$$y(t) = e^{-\eta t}(a \cos \sigma t + b \sin \sigma t) - mg/k, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Anche in questo caso il moto dato dalla soluzione dell'omogenea tende sempre a spegnersi (a causa dell'esponenziale $e^{-\eta t}$) andando verso l'equilibrio $y \equiv -mg/k$, solo che stavolta lo fa compiendo delle oscillazioni sempre più strette, di pulsazione σ.

Se il punto materiale può muoversi nello spazio tridimensionale, rispetto ad un riferimento cartesiano la sua posizione è determinata, al variare del tempo, da una funzione vettoriale $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$; la sua velocità e accelerazione all'istante t saranno dunque rispettivamente $\vec{x}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ e $\vec{x}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$. Se allora il punto ha massa m e su di esso agisce una forza vettoriale

$$\vec{F}(t, \vec{x}, \vec{x}') = (F_x(t, \vec{x}, \vec{x}'), F_y(t, \vec{x}, \vec{x}'), F_z(t, \vec{x}, \vec{x}'))$$

(dipendente in generale dalla posizione $\vec{x}$ del punto, dalla sua velocità $\vec{x}'$ e magari anche esplicitamente dal tempo t), la legge di Newton vale in forma vettoriale:

$$m\vec{x}'' = \vec{F}(t, \vec{x}, \vec{x}'), \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} mx'' = F_x(t, \vec{x}, \vec{x}') \\ my'' = F_y(t, \vec{x}, \vec{x}') \\ mz'' = F_z(t, \vec{x}, \vec{x}'). \end{cases}$$

Dunque il problema viene scomposto nelle tre componenti scalari: ma si noti che potrebbe accadere che il problema sia *misto*, ovvero non separato in tre problemi scalari indipendenti (ad esempio, la funzione $F_x(t, \vec{x}, \vec{x}')$, oltre che da t, x e x', potrebbe dipendere anche da y, y', z e z').

Esempi. **(1)** Pensiamo ad un punto materiale P di massa m posto nel piano (y, z) con y asse orizzontale e z asse verticale ascendente, e sia t il tempo; su P agisce solo la forza di gravità $F = (0, -mg)$. La dinamica del punto è perciò regolata dalla coppia di equazioni lineari separate $my'' = 0$ e $mz'' = -mg$, ovvero (integrando) $y(t) = a + bt$ e $z(t) = c + dt - \frac{1}{2}gt^2$, ove le costanti $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sono da determinare tenendo conto delle condizioni iniziali. Assegnando queste ultime come $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $y'(0) = v_y \neq 0$ e $z'(0) = v_z$, si ottiene $a = y_0$, $b = v_y$, $c = z_0$ e $d - g \cdot 0 = v_z$, ovvero $y(t) = y_0 + v_y t$ e $z(t) = z_0 + v_z t - \frac{1}{2}gt^2$. È dunque chiaro che la coordinata y evolve temporalmente in moto rettilineo uniforme con velocità v_y,

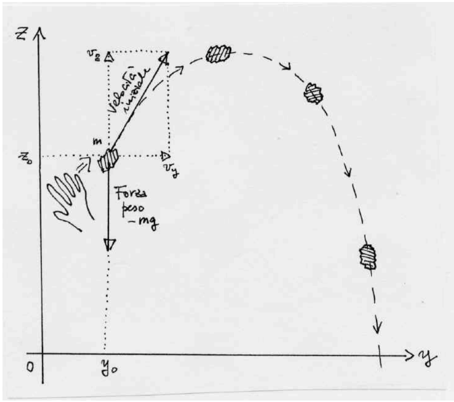

Figura 5.9: *La traiettoria di un corpo pesante in caduta libera è una parabola*

mentre invece la coordinata z evolve con moto uniformemente accelerato. Qual'è la traiettoria descritta da P durante il suo moto? Da $y = y_0 + v_y t$ ricaviamo $t = \frac{y-y_0}{v_y}$, e pertanto $z = z_0 + \frac{v_z}{v_y}(y-y_0) - \frac{g}{2v_y^2}(y-y_0)^2$, che è una parabola con concavità rivolta verso il basso; si noti inoltre che, essendo $\frac{dz}{dy}(y) = \frac{v_z}{v_y} - \frac{g}{v_y^2}(y-y_0)$ e perciò $\frac{dz}{dy}(y_0) = \frac{v_z}{v_y}$, il vettore $\vec{v} = (v_y, v_z)$ (velocità iniziale) è tangente alla parabola nel punto (y_0, z_0) (posizione iniziale), perché $\vec{v}$ è un multiplo scalare non nullo del vettore $(1, \frac{dz}{dy}(y_0))$. Tutto ciò conferma dei fatti risaputi dall'esperienza comune: un corpo lanciato per aria (si pensi semplicemente ad un sasso lanciato per gioco, oppure al masso scoccato da una catapulta) inizia a descrivere una traiettoria parabolica che, se nella prima fase lo può portare a salire nel caso in cui inizialmente gli sia stata impressa una velocità verso l'alto, dopo un po' lo vedrà inevitabilmente cadere verso il basso. **(2)** Il punto materiale P, di massa m, sia ora legato all'origine con una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, e risenta anche della forza di gravità verso il basso (ovvero, nel verso negativo dell'asse z). La forza elastica è data dal vettore $-k\vec{x} = (-kx, -ky, -kz)$, e quella di gravità dal vettore $(0, 0, -mg)$, dunque l'equazione di Newton diventa $(mx'', my'', mz'') = (-kx, -ky, -kz - mg)$. Si tratta di tre problemi scalari separati, ovvero $mx'' = -kx$, $my'' = -ky$ e $mz'' = -kz - mg$. Considerando la *pulsazione* ω data da $\omega^2 = k/m$, le soluzioni generali possono essere scritte, oltre che nella consueta forma $A_1 \cos\omega t + A_2 \sin\omega t$, anche nella forma fisicamente più significativa $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $y(t) = B\cos(\omega t + \psi)$ e $z(t) = C\cos(\omega t + \eta) - \frac{g}{\omega^2}$, con le *ampiezze* $A, B, C \geq 0$ e le *fasi* φ, ψ, η da determinare con le condizioni iniziali. Ad esempio, supponiamo che all'istante $t = 0$ il punto sia lanciato dall'origine con una velocità (v_x, v_y, v_z): in altre parole, consideriamo le condizioni iniziali $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0)$ e $(x'(0), y'(0), z'(0)) = (v_x, v_y, v_z)$. Da $x(0) = A\cos\varphi = 0$ si ricava $\varphi = \frac{\pi}{2}$, e similmente $\psi = \frac{\pi}{2}$, da cui (essendo $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$) si ricava $x(t) = A\sin\omega t$ e $y(t) = B\sin\omega t$; derivando e ponendo $t = 0$ si ottiene dunque $x'(0) = A\omega = v_x$ e $y'(0) = B\omega = v_y$, da cui $A = v_x/\omega$ e $B = v_y/\omega$. Quanto a $z(t)$, da $z(0) = C\cos\eta - \frac{g}{\omega^2} = 0$ e $z'(0) = C\omega\sin\eta = v_z$ si ricava $\eta = \eta_0 := \mathrm{arctg}(v_z\omega/g)$ e $C = C_0 := \sqrt{(\frac{v_z}{\omega})^2 + (\frac{g}{\omega^2})^2}$. Pertanto si ha $x(t) = \frac{v_x}{\omega}\sin\omega t$, $y(t) = \frac{v_y}{\omega}\sin\omega t$ e $z(t) = C_0\cos(\omega t + \eta_0)$. (Si noti che per $g \to 0$ il comportamento della coordinata $z(t)$ deve tornare ad essere simile a quello delle altre due coordinate $x(t)$ e $y(t)$, e infatti $\lim_{g\to 0} C_0 = v_z/\omega$ e $\lim_{g\to 0}\eta_0 = \frac{\pi}{2}$.) **(3)** Vediamo un esempio piuttosto semplice di problema non separato. Supponiamo che il punto materiale P, di massa m, posto nello spazio tridimensionale cartesiano, risenta di una forza diretta sempre secondo il vettore (α, β, γ) (con $\alpha, \gamma \neq 0$) ma proporzionale ed equiorientata alla sua coordinata y: in altre parole, si supponga che $\vec{F} = (\alpha y, \beta y, \gamma y)$, e dunque le equazioni della dinamica $m\vec{x}'' = \vec{F}$ diventano le tre equazioni scalari $mx'' = \alpha y$, $my'' = \beta y$, $mz'' = \gamma y$. Inizieremo dunque col risolvere l'unica equazione separata

$my'' = \beta y$, per poi inserirne i risultati nelle altre due. Come condizioni iniziali, assumeremo che per $t = 0$ il punto si trovi in (x_0, y_0, z_0) con velocità nulla.

• Se $y(0) = y_0 = 0$, essendo anche $y'(0) = 0$, da $my'' = \beta y$ si ottiene la soluzione costante $y(t) = 0$: pertanto $mx'' = mz'' = 0$, ed integrando due volte con le condizioni iniziali date si ottiene $x(t) = x_0$ e $z(t) = z_0$: in altre parole, il punto rimane in quete nella posizione iniziale $(x_0, 0, y_0)$. Ci occuperemo dunque, d'ora in poi, del caso $y_0 \neq 0$.

• Se $\beta = 0$ si ha $y'' = 0$, da cui (integrando due volte) $y(t) = At + B$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare; si ha perciò $mx'' = \alpha(At+B)$ e $mz'' = \gamma(At+B)$, da cui $x'' = \frac{\alpha}{m}(At+B)$ e $z'' = \frac{\gamma}{m}(At+B)$, da cui (integrando due volte) $x = \frac{\alpha}{6m}t^2(At + 3B) + Ct + D$ e $z = \frac{\gamma}{6m}t^2(At + 3B) + Et + F$, con C, D, E, F altre costanti da determinare. Si ha $x(0) = D = x_0$, $x'(0) = C = 0$, $y(0) = B = y_0$, $y'(0) = A = 0$, $z(0) = F = z_0$ e $z'(0) = E = 0$, da cui la soluzione $(x(t), y(t), z(t)) = (\frac{\alpha}{2m}y_0 t^2 + x_0, y_0, \frac{\gamma}{2m}z_0 t^2 + z_0)$: il punto resta sempre sul piano $y = y_0$, e le sue coordinate x e z evolvono con moto uniformemente accelerato rispettivamente con accelerazioni $\frac{\alpha}{m}y_0$ e $\frac{\gamma}{m}y_0$.

• Occupiamoci ora del caso $\beta \neq 0$. Confrontando le equazioni si ottiene $x'' = \frac{\alpha}{\beta}y''$ e $z'' = \frac{\gamma}{\beta}y''$, da cui (integrando due volte) si ricava $x = \frac{\alpha}{\beta}y + Ct + D$ e $z = \frac{\gamma}{\beta}y + Et + F$ con C, D, E, F costanti da determinare. Pertanto, sempre se $\beta \neq 0$ si ha $x(0) = \frac{\alpha}{\beta}y(0) + D = \frac{\alpha}{\beta}y_0 + D = x_0$ e $x'(0) = \frac{\alpha}{\beta}y'(0) + C = 0$, da cui $C = 0$ e $D = x_0 - \frac{\alpha}{\beta}y_0$; similmente, si ottiene $E = 0$ ed $F = z_0 - \frac{\gamma}{\beta}y_0$. Pertanto, se $\beta \neq 0$ si ottiene $x(t) = x_0 + \frac{\alpha}{\beta}(y(t) - y_0)$ e $z(t) = z_0 + \frac{\gamma}{\beta}(y(t) - y_0)$.

Se $\beta > 0$ poniamo per comodità $b = \sqrt{\frac{\beta}{m}}$: allora l'equazione omogenea a coefficienti costanti $my'' - \beta y = 0$ ha radici caratteristiche $\pm b$, dunque ha soluzioni $y(t) = Ae^{bt} + Be^{-bt}$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare. Si ha $y(0) = A + B = y_0$ e $y'(0) = b(A - B) = 0$, da cui $A = B = \frac{y_0}{2}$. La soluzione è pertanto $(x(t), y(t), z(t)) = (x_0 + \frac{\alpha y_0}{\beta}(\frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2} - 1), \frac{y_0}{2}(e^{bt} + e^{-bt}), z_0 + \frac{\gamma y_0}{\beta}(\frac{e^{bt}+e^{-bt}}{2} - 1))$: il punto si allontana con rapidità esponenziale.

Se $\beta < 0$ poniamo per comodità $\omega = \sqrt{-\frac{\beta}{m}}$ (la solita "pulsazione"): allora l'equazione omogenea a coefficienti costanti $my'' - \beta y = 0$ ha radici caratteristiche $\pm i\omega$, dunque ha soluzioni $y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ con $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare, o se si preferisce $y(t) = \mathcal{A}\cos(\omega t + \phi)$ con ampiezza $\mathcal{A}$ e fase ϕ da determinare. In quest'ultima forma si ha $y(0) = \mathcal{A}\cos\phi = y_0$ e $y'(0) = \omega\mathcal{A}\sin\phi = 0$, da cui $\phi = 0$ e $\mathcal{A} = y_0$, da cui $y(t) = y_0\cos\omega t$. La soluzione è pertanto $(x(t), y(t), z(t)) = (x_0 + \frac{\alpha y_0}{\beta}(\cos\omega t - 1), y_0\cos\omega t, z_0 + \frac{\gamma y_0}{\beta}(\cos\omega t - 1))$: se $y_0 \neq 0$ il punto oscilla attorno alla posizione $(x_0 - \frac{\alpha y_0}{\beta}, 0, z_0 - \frac{\gamma y_0}{\beta})$ con periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.