Reti di Petri: approfondimenti

Viktor Teren, Tiziano Villa

Università degli Studi di Verona

Rappresentazione e analisi matriciale delle reti di Petri

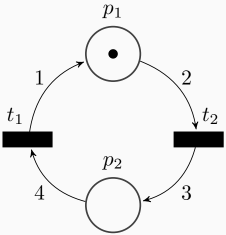
Matrici di ingresso e di uscita

Definizione

Le matrici di ingresso I e di uscita O sono così definite:

$I_{|P|,|T|}$ *con* $I(k,j) = w(p_k, t_j)$, $\forall (p_k, t_j) \in P \times T$, *mentre* $I(k,j) = 0$, $\forall (p_k, t_j) \notin P \times T$.

$O_{|P|,|T|}$ *con* $O(k,j) = w(t_j, p_k)$, $\forall (t_j, p_k) \in T \times P$, *mentre* $I(k,j) = 0$, $\forall (t_j, p_k) \notin T \times P$.



(a) Rete di Petri

$$I = \begin{array}{cl} \begin{matrix} t_1 & t_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \quad p_1 \\ \leftarrow \quad p_2 \end{matrix} \end{array}$$

(b) Matrice di ingresso

$$O = \begin{array}{cl} \begin{matrix} t_1 & t_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \quad p_1 \\ \leftarrow \quad p_2 \end{matrix} \end{array}$$

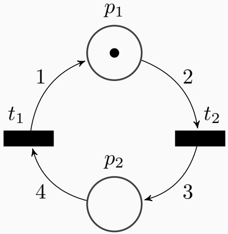
(c) Matrice di uscita

Definizione (Matrice di incidenza)

Si definisce matrice di incidenza la matrice data dalla relazione

$$C = O - I$$

ove I e O sono le matrici di ingresso e di uscita di una rete.



(a) Rete di Petri

$$C = O - I = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Matrice di incidenza

Vettore marcatura

Definizione (Marcatura)

Una marcatura M *e' una funzione che assegna a ogni posto* p *il numero di gettoni* $M(p)$ *presenti in esso. Essa rappresenta lo stato corrente della rete di Petri.*

Definizione (Vettore marcatura)

Data una rete con marcatura M*, si definisce il vettore marcatura* m *come quel vettore colonna di dimensione* $|P|$ *le cui componenti sono valori interi non negativi che rappresentano il numero di gettoni di ogni posto della rete, cioè:*

$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_{|P|} \end{bmatrix}, \text{ con } m_i = M(p_i), \forall i = 1, 2, \dots, |P|.$$

Sequenza di scatti

Definizione (Sequenza di scatti)
Una sequenza di scatti $S = t_1 t_2 \dots t_n$ *abilitata in una marcatura* M_0 *è una sequenza di transizioni* t_i, $1 \leq i \leq n$, $n \in N - \{0\}$, *tali che* t_1 *è abilitata in* M_0 *e lo scatto di* t_i *porta in una marcatura in cui* t_{i+1} *è abilitata.*

La notazione utilizzata per la sequenza di scatti è la seguente.

$$M_1[t_1{>}M_2,\ M_2[t_2{>}M_3 \Rightarrow M_1[t_1 t_2{>}M_3$$

oppure

$$M_1[S{>}M_3, \text{ con } S = t_1 t_2.$$

Vettore degli scatti

Definizione (Vettore degli scatti)

Il vettore degli scatti s *associato ad una sequenza di scatti* S *è un vettore colonna di dimensione* $|T|$*, la cui componente generica* s_i *è pari al numero delle occorrenze della transizione* t_i *nella sequenza* S*.*

Ad esempio, data una rete di Petri con transizioni t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, sia $S = t_1 t_1 t_2 t_3$, allora si ha $s = [2\ 1\ 1\ 0\ 0]^T$.

Equazione di stato

Data la rete di Petri (N, M_0) con matrice di incidenza C, si supponga che sia possibile applicare una certa sequenza di scatti S, con vettore degli scatti s. Sia M la marcatura raggiunta dopo l'applicazione della sequenza S, cioè $M_0[>M$. Si osserva che:

$$M = M_0 + Cs. \tag{1}$$

L'equazione 1 è detta equazione di stato. Tale formula rivela la linearità dell'evoluzione delle reti di Petri.

Infatti sia $S = t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_r}$ la sequenza di scatti e sia $M_0[S>M$ con $M_0[t_{j_1}>M_1[t_{j_2}>M_2 \dots [t_{j_r}>M_r = M$. Allora si ha
$M = M_r = M_{r-1} + C(., t_{j_r}) = M_{r-2} + C(., t_{j_{r-1}}) + C(., t_{j_r}) = \dots$
$= M_0 + \Sigma_{k=1}^{r} C(., t_{j_k}) = M_0 + Cs.$

Si noti che $C(., t_{j_k})$ denota la colonna della matrice d'incidenza C di posizione j_k dove la sua componente i-esima rappresenta il numero di gettoni che il posto p_i perde o guadagna con lo scatto di t_{j_k}.

Equazione di stato

Si sottolinea che lo scatto di una transizione t_{j_k} a partire da una marcatura M_0 ha come effetto la modifica del vettore M_0 cui si sommano algebricamente i valori della colonna $C(., t_{j_k})$, per cui lo scatto di più transizioni ha l' effetto cumulativo di sommare algebricamente a M_0 i vettori colonna di C corrispondenti a tutti gli scatti singoli $(\Sigma_{k=1}^{r} C(., t_{j_k}))$, il che equivale a sommare a M_0 il risultato del prodotto matrice-colonna Cs.

Si ha:

1. La matrice d'incidenza C ha tante righe quanti i posti e tante colonne quante le transizioni;
2. Il vettore di scatto s ha tante righe quante le transizioni e una colonna, e la sua componente j_k-esima indica quante volte la transizione t_{j_k} compare nella sequenza di transizioni S;
3. Cs ha tante righe quanti i posti e una colonna.

Equazione di stato

La componente i-esima del prodotto Cs si ottiene dal prodotto della riga i-esima di C per la colonna s. La componente j_k-esima della riga i-esima di C denota la variazione di gettoni di p_i se scatta t_{j_k}, per cui il prodotto della riga i-esima di C per la colonna s calcola la variazione totale di gettoni del posto i-esimo se scattano le transizioni di S tante volte quante indicate dalle componenti di s. Si noti che il vettore s non cambia se si cambia l'ordine degli scatti nella sequenza S (pur che essi siano abilitati). Si consideri l'esempio di una rete con la seguente matrice d'incidenza C per 4 posti e 5 transizioni, e la sequenza di scatti abilitata $S = t_1t_2t_1t_3$ (ma sarebbe lo stesso per ogni permutazione di questi scatti, se la sequenza permutata fosse abilitata):

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \; s = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; Cs = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

P-invariante

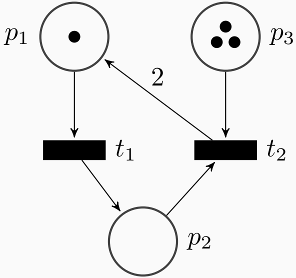
I P-invarianti corrispondono a insiemi di posti tali per cui la somma algebrica pesata dei gettoni che contengono rimane costante per tutte le marcature raggiungibili dalla rete.

Definizione (P-invariante)
Si definisce P-invariante di una rete N un vettore colonna x di dimensione $|P|$ tale che $\forall M \in R(N, M_0)$:

$$x^T M = x^T M_0.$$

Da $M = M_0 + Cs$ si ricava che $x^T M = x^T M_0 + x^T Cs$ per ogni sequenza $s \neq 0$ abilitata, e quindi $x^T M_0 + x^T Cs = x^T M_0$ per ogni $s \neq 0$, per cui un P-invariante x deve soddisfare $x^T Cs = 0$ per ogni $s \neq 0$. Quindi x si ottiene dalle soluzioni intere dell'equazione $x^T C = 0$ oppure $C^T x = 0$.

Esempio di calcolo di P-invariante



I P-invarianti con solo componenti positive stabiliscono la conservazione di una combinazione lineare di gettoni.

Nella rete di Petri dell'esempio il vettore $x = [1\ 1\ 1]^T$ è un P-invariante, ed esprime il fatto che per ogni marcatura raggiungibile la somma dei gettoni è sempre costante ed uguale a 4, come è possibile verificare.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^T C = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{1\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{1\times 2}$$

x è un P-invariante.

P-invariante (cont.)

Le equazioni $x^T C = 0$ o $C^T x = 0$ hanno infinite soluzioni, dato che la combinazione lineare di P-invarianti è un P-invariante.

Una strategia è cercare il più piccolo insieme di P-invarianti che generano tutte le soluzioni.

Definizione (Supporto di un P-invariante)

Il supporto di un P-invariante x è l'insieme, denotato con $||x||$, dei posti corrispondenti ad elementi non nulli di x.

Definizione (P-invariante a supporto minimo)

Un P-invariante è detto a supporto minimo se il suo supporto non contiene quello di nessun altro P-invariante della rete.

Definizione (P-invariante canonico)

Un P-invariante è detto canonico se il massimo comune divisore dei suoi elementi non nulli è pari a 1.

Generatore di P-invarianti positivi

Definizione (Generatore di P-invarianti positivi)
Un insieme generatore di P-invarianti positivi è il più piccolo insieme di P-invarianti positivi PI_k, $1 \leq k \leq q$, *tali che ogni altro P-invariante della rete è ottenibile tramite combinazione lineare degli invarianti* PI_k. *Gli elementi dell'insieme generatore sono detti P-invarianti minimi.*

Proprietà
Un P-invariante è minimo, cioè appartiene all'insieme generatore di P-invarianti, se e solo se è canonico e a supporto minimo.

Proprietà
L'insieme generatore di P-invarianti è finito e unico.

Copertura della rete con P-invarianti

Definizione (Rete coperta da P-invarianti)

Una rete si dice coperta da P-invarianti se ogni posto della rete appartiene al supporto di almeno un P-invariante.

Definizione (Rete conservativa)

Una rete coperta da P-invarianti non negativi, cioè tale per cui:

$$\forall p \in P, \exists \text{ un P-invariante } x \text{ tale che } p \in ||x|| \text{ e } x(p) > 0.$$

è conservativa.

Proprietà

Una rete conservativa è limitata.

Ci sono reti limitate che non sono conservative (si consideri un posto p con un arco verso una transizione t: le sue marcature sono $\{[1], [0]\}$ e per ogni intero positivo x si ha $0 = x.0 \neq x.1 = x$).

Calcolo dei P-invarianti minimi

Algoritmo 1

```
A:=C, Y:=I                                  ▷ I è la matrice identità di ordine n
P:=[Y A];
for i:=1 to m do
    Aggiungi a P tutte le righe che sono combinazioni lineari a coefficienti positivi di coppie di righe di P e che annullano la i–esima colonna della parte A della matrice P;
    Elimina da P le righe in cui la colonna i-esima della parte A della matrice P è non nulla.
end for
Le righe della parte Y della matrice P sono P-invarianti positivi della rete. Tra essi ci sono i P-invarianti minimi.
```

T-invariante

Dualmente ai P-invarianti, i T-invarianti si riferiscono alle transizioni, rappresentando le possibili sequenze di scatti che riportano la rete nella marcatura iniziale.

Una sequenza S è ripetitiva da una marcatura M in cui essa è abilitata se può essere eseguita un numero infinito di volte da M. Una sequenza ripetitiva S abilitata da M si dice stazionaria se $M[S{>}M$.

Data una rete N, sia S una sequenza di scatti abilitata da una marcatura iniziale M_0, sia s il corrispondente vettore degli scatti e sia $M_0[S{>}M$: il vettore s è un T-invariante se e solo se $M = M_0$, cioè la sequenza S è ripetitiva e stazionaria.

Definizione (T-invariante)

Si definisce T-invariante di una rete N un vettore colonna y di dimensione $|T|$ soluzione della seguente equazione:

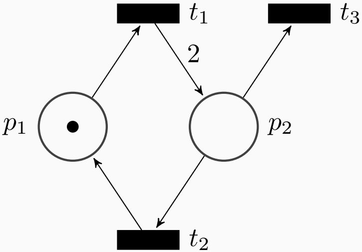
$$Cy = 0.$$

T-invariante

L'esistenza di un T-invariante non implica che sia possibile tornare alla marcatura iniziale dato che potrebbe non esistere una sequenza di scatti abilitata il cui vettore degli scatti coincida con tale T-invariante. In altre parole, l'esistenza di un T-invariante indica che se esistesse una sequenza di transizioni compatibile con il T-invariante (cioè dove ogni transizione è presente tante volte quante compare nel T-invariante) allora la marcatura della rete tornerebbe a quella iniziale.

Per il principio di dualità delle reti di Petri, vale che i T-invarianti di una rete con matrice d'incidenza C sono i P-invarianti della rete duale con matrice d'incidenza C^T. La rete duale di una rete data si ottiene scambiando posti con transizioni e invertendo la direzione degli archi tra gli uni e gli altri.

Esempio di calcolo di T-invariante



$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \; y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Cy = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{2\times 1}$$

y è un T-invariante.

Classi di reti di Petri

Restrizioni strutturali

Definizione (Rete ordinaria)
Una rete si dice ordinaria se ogni arco ha peso 1.

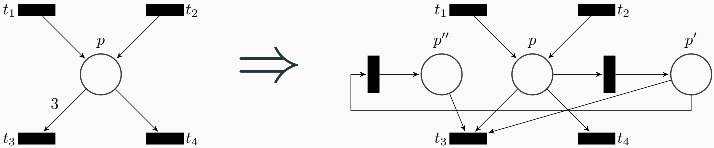
Definizione (Rete pura)
Una rete si dice pura se non ci sono cappi (un cappio è un ciclo orientato nel grafo della rete costituito da una sola transizione e da un solo posto).

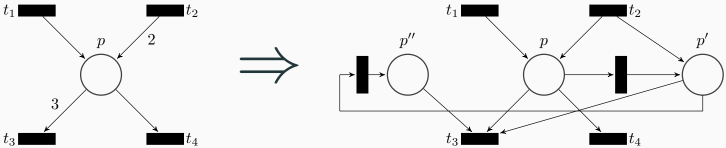
Definizione (Rete ristretta)
Una rete si dice ristretta se è ordinaria e pura.

Le reti ristrette non sono meno espressive di quelle generali, ma possono essere meno efficienti nella dimensione della rappresentazione.

Si possono trasformare reti generali in reti ristrette con trasformazioni elementari.

Trasformazioni in reti ordinarie





Pre e Post

Definizione (Pre e post di un posto)

${}^\bullet p, p^\bullet$ *sono rispettivamente l'insieme delle transizioni d'ingresso e d'uscita relative al posto* p.

Definizione (Pre e post di una transizione)

${}^\bullet t, t^\bullet$ *sono rispettivamente l'insieme dei posti d'ingresso e d'uscita relativi alla transizione* t.

Definizione (Macchina a stati o S-grafo)
Una macchina a stati è una rete di Petri tale che $\forall t_j \in T$, $|{}^\bullet t_j| = 1$ *e* $|t_j^\bullet| = 1$*: ogni transizione ha un solo ingresso ed una sola uscita.*

Una macchina a stati può modellare soltanto la scelta o conflitto. Quindi esse sono meno espressive delle reti ordinarie.

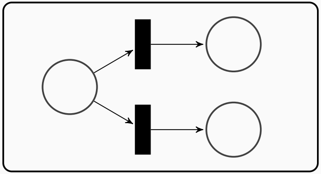


Figura 1: Conflitto

Se c'è più d'un gettone si può rappresentare una forma limitata di parallelismo o concorrenza, ma non si può rappresentare la sincronizzazione dato che l'abilitazione di una transizione dipende da un unico posto.

Una macchina a stati con un solo gettone corrisponde a un automa a stati finiti. Le macchine a stati non sono le uniche reti di Petri che corrispondono ad automi a stati finiti, dato che ogni rete di Petri con uno spazio degli stati finito corrisponde a un automa a stati finiti che genera o marca il medesimo linguaggio.

Grafi marcati

Definizione (Grafo marcato o Grafo di transizione dei segnali o T-grafo)

Un grafo marcato è una rete di Petri tale che $\forall p_i \in P$, $|^\bullet p_i| = 1$ *e* $|p_i^\bullet| = 1$: *ogni posto ha un solo ingresso ed una sola uscita.*

Un grafo marcato non può rappresentare la scelta o conflitto (ogni posto ha una sola transizione in uscita), ma può rappresentare il parallelismo o concorrenza e la sincronizzazione (l'abilitazione di una transizione può dipendere da più posti). Quindi esse sono meno espressive delle reti ordinarie.

Esiste una dualità tra macchine a stati e grafi marcati.

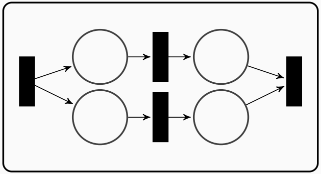


Figura 2: Sincronizzazione di flussi paralleli

Esempi di macchina a stati e grafo marcato

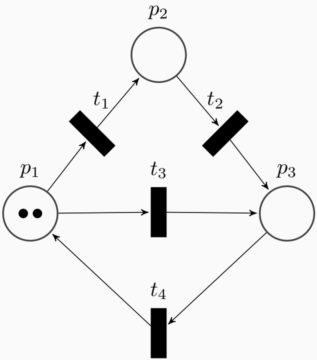


Figura 3: Macchina a stati

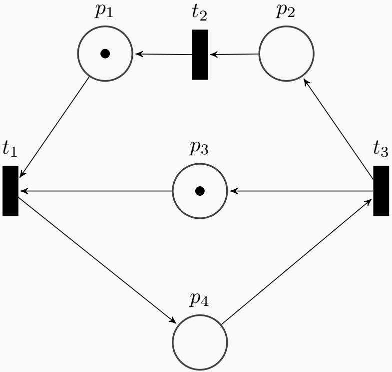
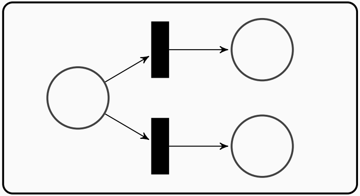


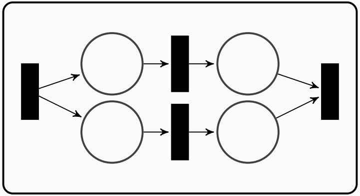
Figura 4: Grafo marcato

Definizione (Rete di Petri a scelta libera)

Una rete a scelta libera è una rete di Petri tale che $\forall t_j \in T$ *e* $p_i \in {}^{\bullet}t_j$, *succede che o* ${}^{\bullet}t_j = \{p_i\}$ *oppure* $p_i^{\bullet} = \{t_j\}$*: per ogni arco da un posto a una transizione* $(p_i \to t_j)$*, o quel posto è l'unico posto in ingresso a quella transizione (non c'è sincronizzazione), oppure quella transizione è l'unica transizione in uscita da quel posto (non ci sono conflitti).*



(a) Conflitto



(b) Sincronizzazione di flussi paralleli

Figura 5: Strutture modellabili da una rete di Petri a scelta libera

Reti a scelta libera (Free-choice)

Idea: se un posto e' in ingresso a più transizioni, esso è l'unico posto in in ingresso a tali transizioni, per cui o tutte le transizioni in conflitto sono abilitate o nessuna di esse lo è: quindi si può scegliere quale transizione far scattare indipendentemente dalla marcatura corrente.

Una rete a scelta libera consente di modellare scelta, parallelismo e sincronizzazione, ma non consente di rappresentare contemporaneamente scelta e parallelismo relativamente alla medesima transizione. Quindi esse sono meno espressive delle reti ordinarie.

Ogni macchina a stati o grafo marcato è una rete a scelta libera, ma la classe delle reti a scelta libera è più ampia dell'unione delle due precedenti.

Esempi di rete a scelta libera e non

Rete a scelta libera che non è né una macchina a stati, né un grafo marcato.

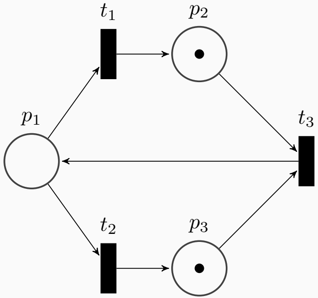


Figura 6: Rete a scelta libera

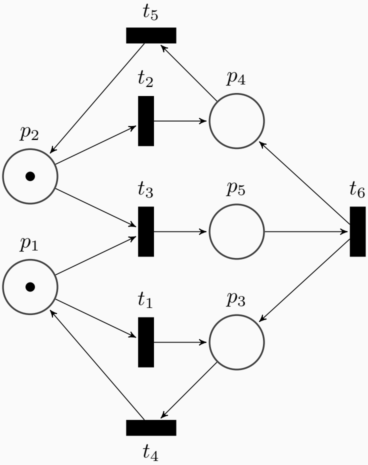
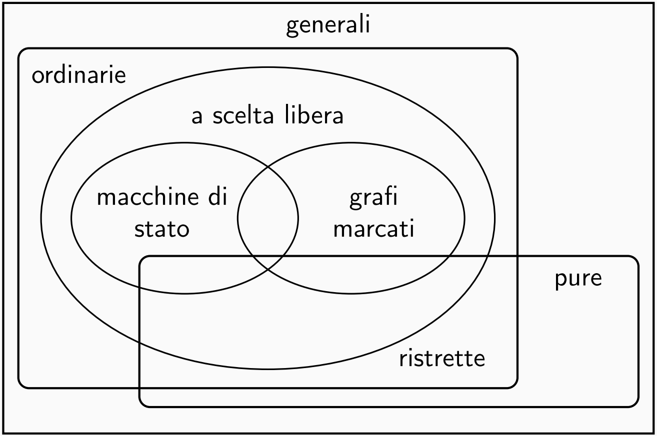


Figura 7: Rete non a scelta libera

Classificazione strutturale delle reti di Petri



Reti a scelta libera estesa (Extended free-choice)

Definizione (Rete di Petri a scelta libera estesa)
Una rete a scelta libera estesa è una rete di Petri tale che $\forall t_j \in T$ *e* $p_i \in {}^\bullet t_j$ *(cioè per un arco* $p_i \to t_j$*), c'è un arco da tutti i posti in ingresso a* t_j *a tutte le transizioni in uscita da* p_i*.*

Idea: se due posti condividono una transizione in uscita, allora essi condividono tutte le transizioni in uscita.

Le reti di Petri a scelta libera estesa possono modellare la scelta simmetrica, il conflitto e la sincronizzazione di flussi paralleli.

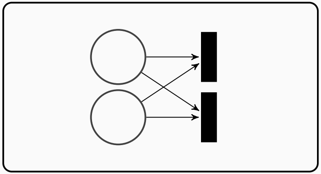


Figura 8: Scelta simmetrica

Definizione (Rete di Petri a scelta asimmetrica)
Una rete a scelta asimmetrica è una rete di Petri tale che $p_i^\bullet \cap p_j^\bullet \neq \emptyset \Rightarrow p_i^\bullet \subseteq p_j^\bullet$ *oppure* $p_i^\bullet \supseteq p_j^\bullet$.

Le reti di Petri a scelta asimmetrica possono modellare anche la scelta asimmetrica (che non è esprimibile con le reti a scelta libera).

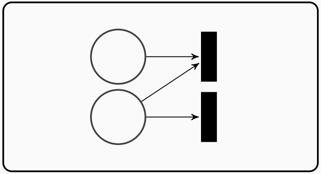


Figura 9: Scelta asimmetrica

Confronto rispetto alla scelta

Reti a scelta libera e reti a scelta libera estesa soddisfano la proprietà che se t_1 e t_2 condividono un posto in ingresso, allora non ci sono marcature in cui una transizione è abilitata e l'altra disabilitata, in altri termini c'è scelta libera su quale transizione far scattare. Una rete a scelta libera estesa si può trasformare in una a scelta libera.

- Le macchine a stati non ammettono la sincronizzazione.
- I grafi marcati non ammettono conflitti.
- Le reti a scelta libera non ammettono confusione.
- Le reti a scelta libera asimmetrica non ammettono confusione simmetrica.

Le reti di Petri generiche possono modellare anche la confusione, oltre a tutte le strutture modellabili dalle sottoclassi di reti di Petri presentate precedentemente.

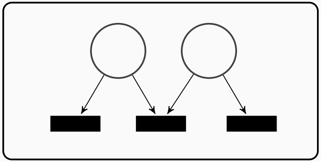
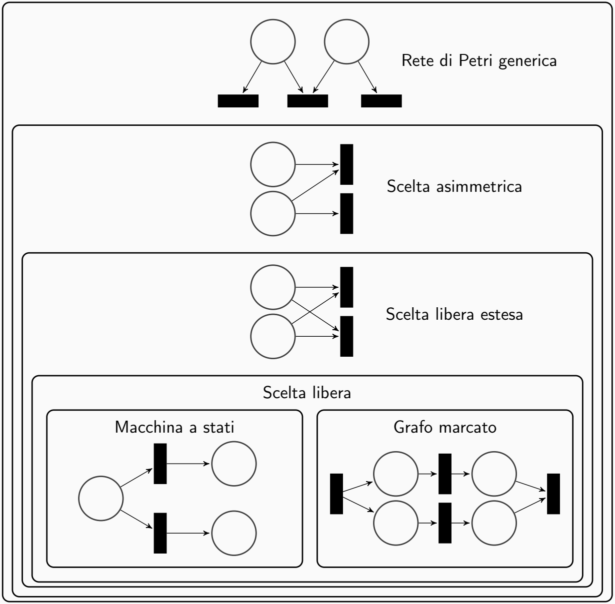


Figura 10: Confusione

Gerarchia delle reti di Petri



Decomposizione in S-componenti e T-componenti

Definizione (Rete)

Una rete $N = (P, T, A)$ *è una tripla di posti* P*, transizioni* T*, e archi* $A \subseteq P \times T \cup T \times P$*.*

Definizione (Sottorete)

$N' = (P', T', A')$ *è una sottorete di* $N = (P, T, A)$ *se e solo se* $P' \subseteq P$*,* $T' \subseteq T$*,* $A' = A \cap ((P' \times T') \cup (T' \times P'))$*.*

Definizione (Generazione di una sottorete)

N' *è generata dall'insieme* $X' = P' \cup T' \subseteq P \cup T$ *se e solo se* $A' = A \cap (P' \times T') \cup (T' \times P'))$*.*

Intuitivamente, una S-componente (T-componente) e' una sottorete generata dai posti (transizioni) di una macchina a stati (grafo marcato).

Definizione (S-componente (T-componente))

N' *è una* **S-componente (T-componente)** *di* N *se e solo se* N' *è un S-grafo (T-grafo) fortemente connesso.*

Definizione (Rete limitata)

Una rete di Petri (N, M_0) *è limitata se e solo se per tutti i posti* $p \in S$ *esiste* $k \in N$ *tale che per tutte le marcature* M *raggiungibili da* M_0 *si ha* $M(p) \leq k$.

Definizione (Rete strutturalmente limitata)

Una rete di Petri N *è strutturalmente limitata se e solo se è limitata per ogni marcatura iniziale* M_0.

Definizione (Vivezza)

Una transizione t *si dice* **viva** *in* (N, M_0) *se e solo per tutte le marcature* $M \in R(N, M_0)$ *esiste una marcatura* $M' \in R(N, M)$ *tale che* t *è abilitata in* M'.

Una rete di Petri (N, M_0) *si dice* **viva** *se e solo se tutte le transizioni sono vive.*

N *è strutturalmente viva se e solo se c'è una marcatura iniziale* M_0 *tale che* (N, M_0) *è viva.*

Sottoreti ben-formate

Definizione (Rete ben-formata)
Una rete di Petri N *è ben-formata se esiste una marcatura* M_0 *di* N *tale che* (N, M_0) *è viva e sicura (limitata con* $k = 1$*).*

La rete non è necessariamente viva nella marcatura corrente.

Teorema (S-componenti e reti ben-formate)
Una rete di Petri N *ben-formata si può coprire con S-componenti.*

Esempio di copertura con S-componenti

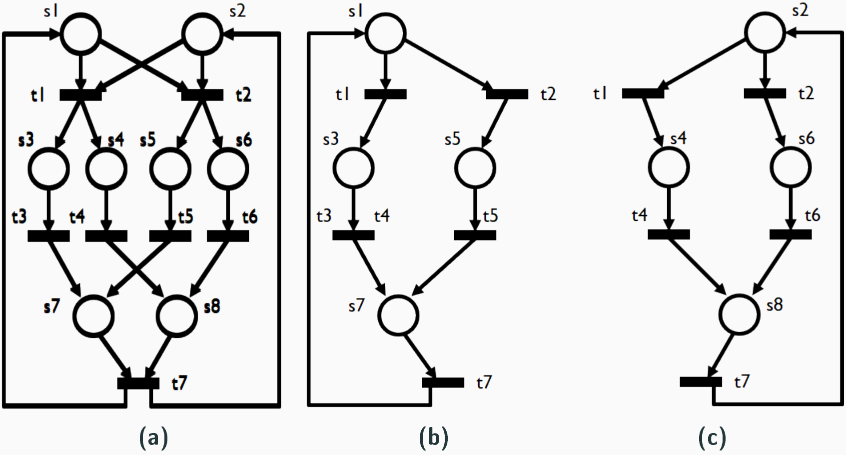


Figura 11: Decomposizione di una rete di Petri (11a) in S-componenti (11b e 11c).

Esempio di copertura con T-componenti

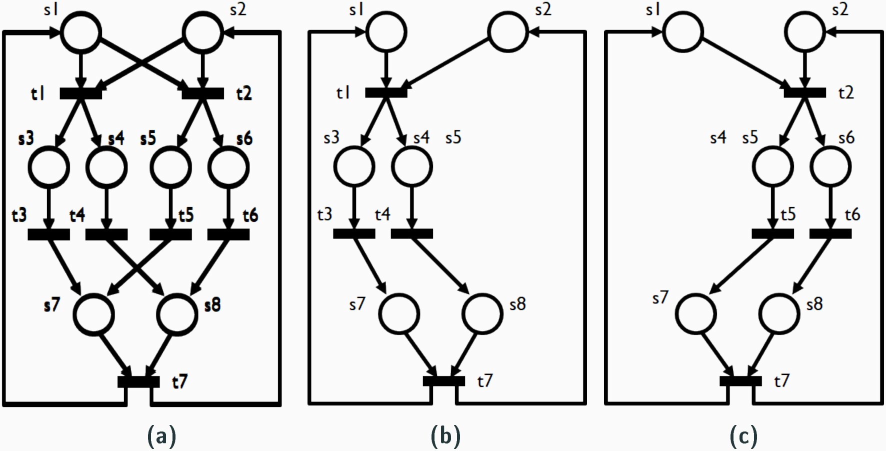


Figura 12: Decomposizione di una rete di Petri (12a) in T-componenti (12b e 12c).

S-copertura per una rete non ben-formata

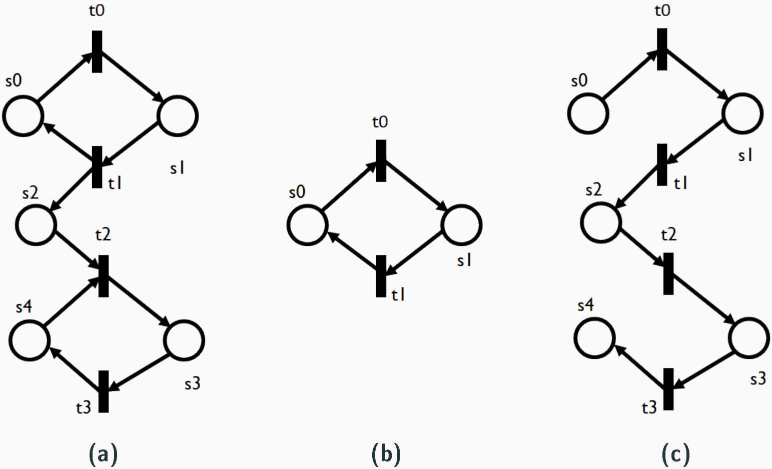


Figura 13: Decomposizione di una rete di Petri che non è ben-formata (13a) in S-componenti (13b e 13c).

S-componente: esempio con l'autoanello

É possibile avere S-componenti con autoanelli in quanto la presenza di un autoanello non viola la proprietà: $\forall t \in T' : |^{\bullet}t \cap S'| = |t^{\bullet} \cap S'| = 1$.

Nell'esempio seguente si può notare che nel secondo S-componente in Fig. 15 la transizione t_1 presenta un autoanello.

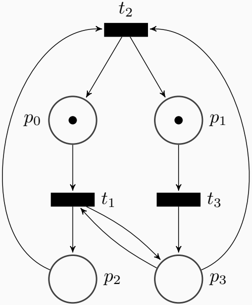


Figura 14: Rete di Petri

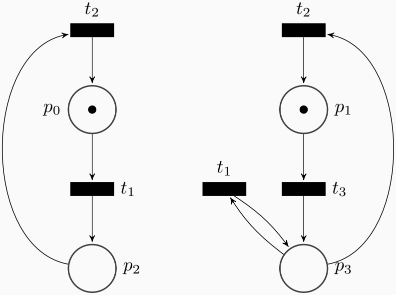


Figura 15: S-componenti derivati

Sifoni e trappole, reti vive e sicure

Sifone

Un sifone è un insieme di posti che genera un sottoinsieme dei gettoni che consuma, per cui se si svuota non può più riacquistare gettoni (le transizioni d'ingresso sono anche transizioni d'uscita, ma non necessariamente il viceversa).

Definizione (Sifone)

Un insieme di posti S è un sifone se e solo se:

$$^\bullet S \subseteq S^\bullet$$

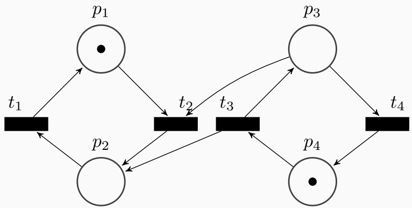
Definizione (Sifone minimo)

Un sifone S è detto minimo se e solo se non esiste un altro sifone S' tale che $S' \subset S$.

Definizione (Sifone di base)

L'unione di sifoni è un sifone. Un sifone di base è un sifone che non può essere ottenuto come unione di altri sifoni.

Sifone



$S = \{p_3, p_4\}$ è un sifone sia minimo che di base.

${}^\bullet S = \{t_3, t_4\} \subseteq S^\bullet = \{t_2, t_3, t_4\}$.

Anche $S' = \{p_2, p_3, p_4\}$ e l'insieme formato da tutti i posti della rete sono sifoni: ${}^\bullet S' = \{t_2, t_3, t_4\} \subseteq S'^\bullet = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$.

Trappola

Una trappola è un insieme di posti che consuma un sottoinsieme dei gettoni che genera, per cui acquisito almeno un gettone non si può più svuotare (le transizioni d'uscita sono anche transizioni d'ingresso, ma non necessariamente il viceversa).

Definizione (Trappola)

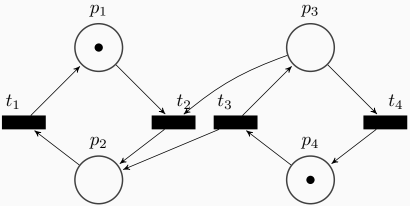
Un insieme di posti S è una trappola se e solo se:

$$S^\bullet \subseteq {}^\bullet S$$

Proprietà

L'unione di sifoni (trappole) è un sifone (trappola).

Trappola

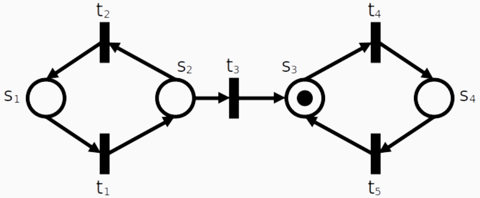


L'insieme $S = \{p_1, p_2\}$ è una trappola: $S^\bullet = \{t_2, t_1\} \subseteq {}^\bullet S = \{t_2, t_1, t_3\}$.

L'insieme $S' = \{p_1, p_2, p_4\}$ è una trappola:
$S'^\bullet = \{t_3, t_2, t_1\} \subseteq {}^\bullet S' = \{t_4, t_2, t_1, t_3\}$.

L'insieme $S'' = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ è una trappola: $S''^\bullet = {}^\bullet S'' = \{t_4, t_3, t_2, t_1\}$.

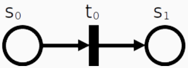
Esempi di sifoni e trappole



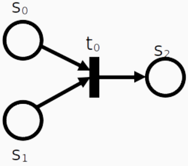
L'insieme $S = \{s_1, s_2\}$ è un sifone: ${}^{\bullet}S = \{t_1, t_2\} \subseteq S^{\bullet} = \{t_1, t_2, t_3\}$.

L'insieme $S' = \{s_3, s_4\}$ è una trappola: $S'^{\bullet} = \{t_4, t_5\} \subseteq {}^{\bullet}S' = \{t_3, t_4, t_5\}$.

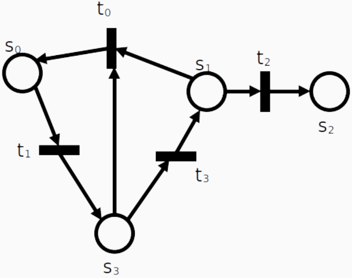
Esempi di sifoni e trappole

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

- $S = \{s_0\}$ è un sifone (minimale): ${}^\bullet S = \{\} \subseteq S^\bullet = \{t_0\}$.
- $S' = \{s_1\}$ è una trappola: $S'^\bullet = \{\} \subseteq {}^\bullet S' = \{t_0\}$.

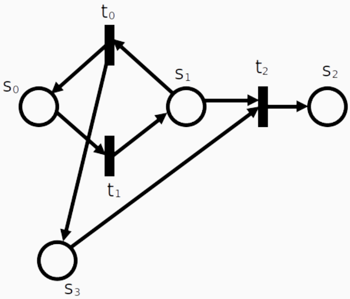
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$S = \{s_0, s_1\}$ è un sifone NON minimale: ${}^\bullet S = \{\} \subseteq S^\bullet = \{t_0\}$, in quanto strutturalmente $S' = \{s_0\}$ ed $S'' = \{s_1\}$ sono anche essi sifoni: ${}^\bullet S' = {}^\bullet S'' = \{\} \subseteq S'^\bullet = S''^\bullet = \{t_0\}$.</td>
</tr>
</table>

Esempi di sifoni e trappole



- Sifone $S = \{s_0, s_1, s_3\}$: ${}^\bullet S = \{t_0, t_1, t_3\} \subseteq S^\bullet = \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$.
- Sifone minimale: $S' = \{s_0, s_3\}$: ${}^\bullet S' = \{t_0, t_1\} \subseteq S'^\bullet = \{t_0, t_1, t_3\}$.
  Invece $S'' = \{s_1, s_3\}$ non è un sifone:
  ${}^\bullet S'' = \{t_1, t_3\} \not\subseteq S''^\bullet = \{t_0, t_2, t_3\}$.

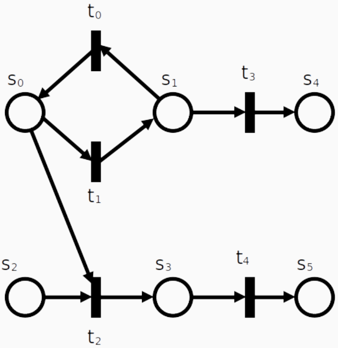
Esempi di sifoni e trappole



Sifone minimale: $S = \{s_0, s_1\}$: ${}^{\bullet}S = \{t_0, t_1\} \subseteq S^{\bullet} = \{t_0, t_1, t_2\}$.

Trappola minimale: $S = \{s_2\}$: $S^{\bullet} = \{\} \subseteq {}^{\bullet}S = \{t_2\}$.

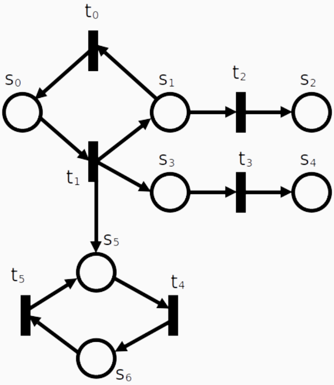
Esempi di sifoni e trappole



Sifone minimale: $S = \{s_2\}$: ${}^\bullet S = \{\} \subseteq S^\bullet = \{t_2\}$.

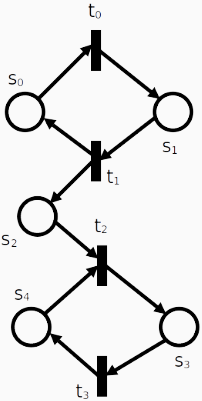
Trappole minimali: $S = \{s_4\}$: $S^\bullet = \{\} \subseteq {}^\bullet S = \{t_3\}$, $S = \{s_5\}$: $S^\bullet = \{\} \subseteq {}^\bullet S = \{t_4\}$.

Esempi di sifoni e trappole



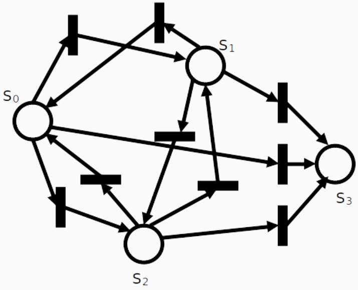
Sifone minimale: $S = \{s_0, s_1\}$: ${}^\bullet S = \{t_0, t_1\} \subseteq S^\bullet = \{t_0, t_1, t_2\}$.

Esempi di sifoni e trappole



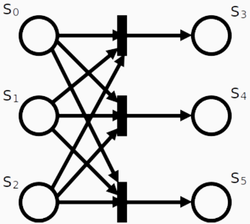
Sifoni/trappole minimali: $S = \{s_0, s_1\}$: ${}^\bullet S = \{t_0, t_1\} = S^\bullet = \{t_0, t_1\}$, $S = \{s_3, s_4\}$: ${}^\bullet S = \{t_2, t_3\} = S^\bullet = \{t_2, t_3\}$.

Esempio di sifone con la relativa complessità



- I posti s_0, s_1 ed s_2 sono tutti direttamente connessi tra loro
- Sifone minimale: $S = \{s_0, s_1, s_2\}$:
  $^\bullet S = \{t_1, t_3, t_0, t_5, t_2, t_4\} \subseteq S^\bullet = \{t_0, t_7, t_2, t_1, t_4, t_6, t_3, t_5, t_8\}$.
- I seguenti insiemi NON sono sifoni
  - $\{s_0, s_1\}$, $\{s_1, s_2\}$, $\{s_0, s_2\}$, $\{s_0\}$, $\{s_1\}$, $\{s_2\}$. E.g., $S = \{s_0, s_1\}$:
    $^\bullet S = \{t_1, t_3, t_0, t_5\} \subseteq S^\bullet = \{t_0, t_7, t_2, t_1, t_4, t_6\}$ etc.
- Complessità: $\sim O(S, T)$

Esempio di sifone con la relativa complessità



- Struttura che crea un numero **esponenziale** di sifoni nel caso peggiore.
- Sifoni minimali:
  - $\{s_0\}$, $\{s_1\}$, $\{s_2\}$
- Sifoni:
  - $\{s_0\}$, $\{s_1\}$, $\{s_2\}$
  - $\{s_0, s_1\}$, $\{s_0, s_2\}$, $\{s_1, s_2\}$
  - $\{s_0, s_1, s_2\}$.
  - Infatti $S = \{s_0, s_1, s_2\}$: ${}^\bullet S = \{\} \subseteq S^\bullet = \{t_1, t_2, t_3\}$ etc.

Calcolo dei sifoni

Si considera una rete con matrice di ingresso I e di uscita O.

1. Si costruisce una rete con matrice di uscita O e matrice di ingresso I' nel seguente modo. Per ogni transizione t della rete, il peso degli archi entranti in t e uscenti dai posti $\in {}^\bullet t$, si calcola con:

   $I'(p,t) = kI(p,t)$, $k =$ somma dei pesi degli archi uscenti da t.

   Sia C^* la nuova matrice di incidenza.
2. Si risolve la disequazione $x'C^* \leq 0$.
3. Il supporto $S = ||x||$, con $x \geq 0$, è un sifone della rete originale.

La disequazione del passo 2) può essere risolta con l'utilizzo di variabili ausiliarie nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} x' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^* \\ I \end{bmatrix} = 0$$

con $x, z \geq 0$.

Componente strutturale (S-componente)

Teorema (Sifoni minimi e S-componenti (algoritmo di Esparza/Kemper))
$N' = (S', T', F')$ è una S-componente di una rete $N = (S, T, F)$ se $S' \subseteq S$ è un sifone minimo ed N' è fortemente connesso, ed inoltre $\forall t \in T' : |\bullet t \cap S'| = |t \bullet \cap S'| = 1$.

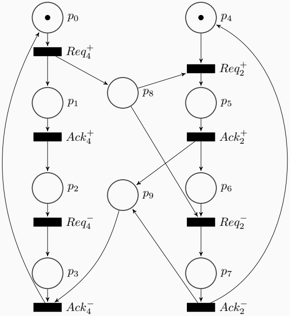


Figura 16: Protocollo (handshake) da 4 fasi a 2 fasi

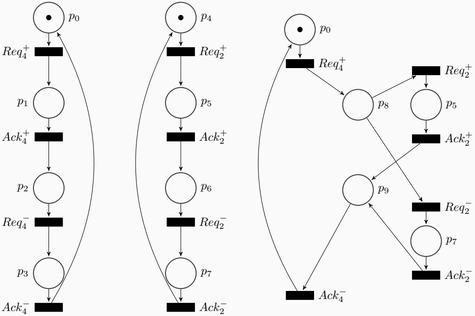


Figura 17: S-componenti

Proprietà di trappole e sifoni

Proprietà (Sifone non marcato)

Se S è un sifone privo di gettoni in una certa marcatura M, allora è privo di gettoni in ogni marcatura raggiungibile $M' \in [M>$.

Proprietà (Trappola marcata)

Se S è una trappola marcata in una certa marcatura M, allora rimane marcata in ogni marcatura raggiungibile $M' \in [M>$.

Proprietà (Sifone, trappole e P-invarianti)

Il supporto di un P-invariante con elementi non negativi è un sifone e una trappola.

Proprietà (Sifoni e marcature morte)

L'insieme dei posti privi di gettoni di una marcatura morta è un sifone non marcato.

Proprietà (Sifoni, trappole e vivezza)

Se ogni sifone contiene una trappola marcata in una marcatura M, allora non esiste in $[M>$ una marcatura morta.

Proprietà delle macchine a stati

Teorema

Una macchina a stati (N, M_0) *è viva se e solo se* N *è fortemente connessa e* M_0 *ha almeno un gettone.*

Teorema

Una macchina a stati (N, M_0) *è sicura se e solo se* M_0 *ha al più un gettone.*

Teorema

Una macchina a stati (N, M_0) *viva è sicura se e solo se* M_0 *ha esattamente un gettone.*

Proprietà dei grafi marcati

Teorema

Un grafo marcato (N, M_0) è vivo se e solo se M_0 inserisce almeno un gettone in ogni circuito diretto in N.

Teorema

Un grafo marcato vivo (N, M_0) è sicuro se e solo ogni arco (posto) appartiene a un circuito diretto C con $M_0(C) = 1$ ($M_0(C)$ è il numero di gettoni nel circuito C).

Teorema

Un grafo marcato fortemente connesso e vivo (N, M_0) è sicuro se e solo per ogni marcatura $M \in R(N, M_0)$ l'insieme di archi marcati è un taglio minimo (un taglio è un insieme di archi la cui rimozione taglia tutti i circuiti).

Proprietà delle reti a scelta libera

Teorema (Commoner)

Una rete di Petri a scelta libera (N, M_0) *è viva se e solo se ogni sifone contiene una trappola marcata.*

Teorema

Una rete di Petri a scelta libera viva (N, M_0) *è sicura se e solo se è coperta da S-componenti fortemente connesse ciascuna delle quali ha esattamente un gettone in* M_0*.*

Teorema

Sia (N, M_0) *una rete di Petri a scelta libera viva e sicura. Allora* N *è coperta da T-componenti fortemente connesse. Inoltre esiste una marcatura* $M \in R(N, M_0)$ *tale che ogni componente* (N_1, M_1) *è un grafo marcato vivo e sicuro (*M_1 *è la restrizione di* M *a* N_1*).*

Teorema

Una rete di Petri a scelta asimmetrica (N, M_0) *è viva se (ma non solo se) ogni sifone contiene una trappola marcata.*

Proprietà delle reti a scelta libera

Taluni dei risultati precedenti sono riassumibili come teorema di Hack (che negli anni '70 introdusse le reti a scelta libera e ne studiò le proprietà), che stabilisce che una rete a scelta libera viva e sicura si può decomporre nell'interconnessione di macchine a stati (grafi marcati) vivi e sicuri.

Teorema (M.H.T.Hack)
Una rete di Petri a scelta libera N è ben-formata (cioè esiste una marcatura M_0 di N tale che (N, M_0) è viva e sicura) se e solo se

1. *ogni T-componente è fortemente connessa e non vuota e l'insieme delle T-componenti copre la rete,*
2. *ogni S-componente è fortemente connessa e non vuota e l'insieme delle S-componenti copre la rete.*

Decidibilità, linguaggi, estensioni

Proprietà comportamentali

Le proprietà di una rete di Petri sono:

- **Raggiungibilità**: data una rete di Petri, una marcatura iniziale M_0 e una marcatura M, è possibile raggiungere M da M_0?
- **Vivezza e blocco**: per ogni transizione t e per ogni $M \in R(N, M_0)$ esiste $M' \in R(N, M)$ in cui t è abilitata. Si ha un blocco se esiste $M \in R(N, M_0)$ in cui nessuna transizione è abilitata.
- **Limitatezza**: esiste un maggiorante $k \geq 0$ tale che in ogni marcatura raggiungibile in ogni posto si possono avere al più k gettoni.
- **Conservatività**: esiste un vettore di pesi x tale che ogni marcatura raggiungibile il numero dei gettoni pesato con x si conserva.
- **Ripetitività**: una rete di Petri si dice ripetitiva se esiste una sequenza di transizioni che può essere eseguita un numero infinito di volte.
- **Reversibilità**: una rete di Petri si dice reversibile se per ogni marcatura $M \in R(N, M_0)$ vale $M_0 \in R(N, M)$ (da ogni marcatura raggiungibile si può ritornare alla marcatura iniziale).

Proprietà comportamentali

Raggiungibilità: il problema è banalmente semi-decidibile e decidibile in modo non-elementare (Mayr, Kosaraju 1982, Lambert, Leroux, Reutenuaer, Lasota). L'albero di copertura fornisce una condizione necessaria, ma non sufficiente. Vivezza e blocco sono riconducibili alla raggiungibilità. Il problema della reversibilità si può ridurre a quello della raggiungibilità di una particolare marcatura.

La limitatezza e conservatività sono decidibili con l'albero di copertura. che fornisce una condizione necessaria e sufficiente. Ad es., una rete è limitata se e solo se non ci sono posti con ω nell'albero di copertura.

L'inclusione (stabilisce se l'insieme di raggiungibilità di una rete include quello di un'altra e in particolare se i due siano uguali) è indecidibile.

Le reti di Petri sono a metà strada tra gli automi a stati finiti (per cui tutte le proprietà sono decidibili) e le macchine di Turing (per cui quasi nessuna proprietà lo è).

Se s'incrementa di poco l'espressività delle reti di Petri esse diventano Turing-equivalenti e le loro proprietà indecidibili.

Reti di Petri con archi inibitori (confronto con 0)

S'introduce il concetto che una transizione t per scattare, oltre alla presenza di gettoni nei posti d'ingresso, possa richiedere anche che uno o più posti siano vuoti. La condizione che il posto p sia vuoto s'indica con un arco speciale da p a t, detto arco inibitore.

Domanda: l'uso di archi inibitori aumenta l'espressività del modello rispetto alle reti classiche? Si, a meno che la rete sia limitata, cioè ci sia una maggiorazione sul numero di gettoni che si possono accumulare nei posti, nel qual caso una rete con archi inibitori si può simulare con una rete classica che simula tale effetto.

Un rete di Petri con archi inibitori è Turing-equivalente.

Esempio di rete con archi inibitori

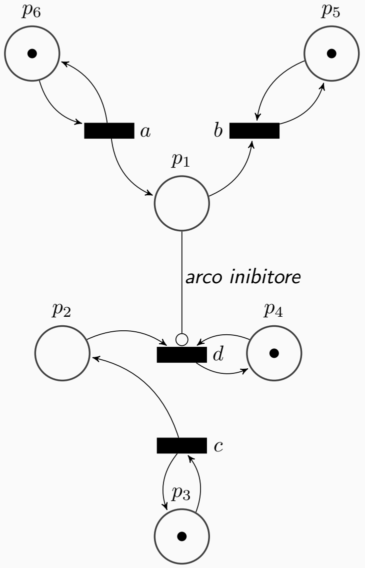
Comportamento:

c può scattare a piacere accumulando gettoni in p_2;

d per scattare deve riscontrare che in p_1 ci sono solo 0 gettoni (arco inibitore);

affinché ci siano 0 gettoni in p_1 deve succedere che in b ci sia un numero di scatti esattamente uguale a quello in a;

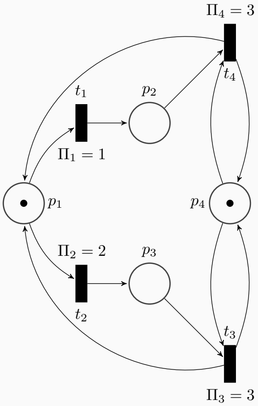
d se abilitato può scattare al più tante volte quante volte è scattato c.



Reti di Petri con priorità

Il risultato dello scatto di una transizione è il medesimo delle reti senza priorità. Associando una priorità a ciascuna transizione, quest'ultima non può scattare se una transizione con priorità più alta ha i gettoni disponibili per uno scatto.

Nella figura di esempio la transizione t_1 ha la priorità più bassa cioè 1, la transizione t_2 ha la priorità 2 e le transizioni t_3 e t_4 hanno la priorità più alta: 3. Iniziando con la marcatura iniziale $M_0^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, soltanto la transizione t_2 può essere abilitata avendo la priorità più alta tra le transizioni che hanno i gettoni necessari per poter scattare. Calcolando gli scatti successivi si può notare che la transizione t_1 non sarà mai abilitata non avendo la priorità sufficiente per superare la priorità di t_2.



Reti di Petri con priorità

Una rete di Petri con priorità è Turing-equivalente e perciò le proprietà fondamentali come raggiungibilità e vitalità diventano indecidibili.

Si può sempre trasformare una rete con priorità in una con archi inibitori e viceversa.

Linguaggi di Petri e gerarchia di Chomsky

Teorema

Un linguaggio regolare è un linguaggio di Petri.

Teorema

Il linguaggio $\{a^n b^n | n > 1\}$ *è un linguaggio sia di Petri che libero da contesto, ma non e' regolare.*

Teorema

Il linguaggio $\{a^n b^n c^n | n > 1\}$ *è un linguaggio sia di Petri che sensibile al contesto ma non e' libero dal contesto.*

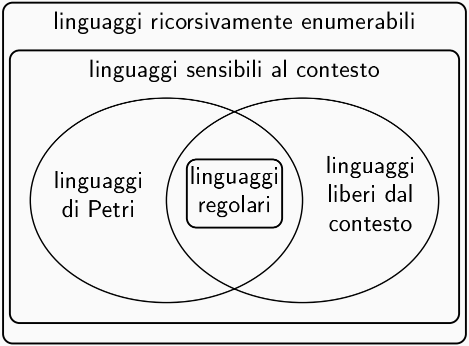
Teorema

Il linguaggio libero da contesto $\{ww^R | w \in \Sigma^\star\}$ *non è un linguaggio di Petri.*

Teorema

Un linguaggio di Petri è un linguaggio sensibile al contesto.

Linguaggi di Petri e gerarchia di Chomsky



linguaggio	accettato da (automa)
regolare	automa finito
libero dal contesto	automa a pila ND
di Petri	rete di Petri
sensibile al contesto	automa limitato linearmente
ricorsivamente enumerabile	macchina di Turing rete di Petri (estesa con archi inibitori)

Altre estensioni delle reti di Petri

Reti di Petri di alto livello

Nelle reti di Petri ordinarie i gettoni sono completamente indistinguibili, cioè non portano con sé alcuna informazione. Nelle reti ad alto livello, i gettoni sono associate ad altre informazioni. Oltre a ciò alle transizioni sono connesse delle condizioni logiche che influenzano lo scatto delle transizioni stesse. Tra le reti di alto livello ci sono:

- Reti di Petri colorate
- Reti di Petri gerarchiche

Reti di Petri colorate (CPN): definizione

Una rete di Petri colorata è una tupla CPN = (Σ, P, T, A, N, C, G, E, I) che soddisfa i seguenti requisiti:

- Σ è un insieme finito di tipi non vuoti, chiamati **insiemi di colori**.
- P è un insieme finito di **posti**.
- T è un insieme finito di **transizioni**.
- A è un insieme finito di **archi** tali per cui:
  - $P \cap T = P \cap A = T \cap A = \emptyset$.
- N è una funzione **nodo**. È definita da A in $P \times T \cup T \times P$.
- C è una funzione **colore**. È definita da P in Σ.
- G è una funzione **guardia**. È definita da T nelle espressioni del tipo:
  - $\forall t \in T$: [*Type(G(t))=B* $\wedge$ *Type(Var(G(t)))* $\subseteq \Sigma$].
- E è una funzione di **espressione degli archi**. É definita da A nelle espressioni del tipo:
  - $\forall a \in A$: [*Type(E(a))* $= C(p(a))_{MS} \wedge$ *Type(Vat(E(a)))* $\subseteq \Sigma$] dove $p(a)$ è il posto di $N(a)$.
- I è una funzione di **inizializzazione**. È definita da P nelle espressioni chiuse del tipo:
  - $\forall p \in P$: [*Type(I(p))* $= C(p)_{MS}$].

Reti di Petri colorate (cont.)

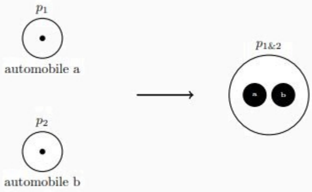


Figura 18: Trasformazione di una rete generica in una rete colorata.

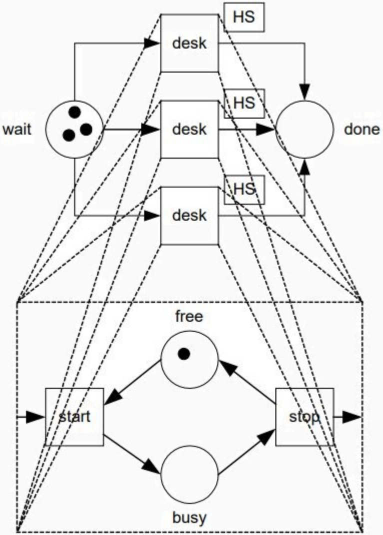
Nelle reti classiche i gettoni non sono distinguibili tra di loro: in figura l'automobile a e la b sono distinguibili solo grazie al posto in cui si trovano. Un'alternativa a questa rappresentazione consiste nel rappresentare le due auto nello stesso posto rendendole univocamente individuabili grazie all'uso di gettoni differenti detti "colorati". I colori in questo contesto possono essere visti come identificatori di differenti tipi di oggetto.

Una rete colorata usa gettoni di diversi "colori", ad ogni transizione sono quindi associati diversi tipi di scatto a seconda dei gettoni coinvolti.

Reti di Petri gerarchiche

Le reti di Petri gerarchiche possono essere utilizzate per lavorare su diversi livelli di astrazione. L'idea è quella di includere un'intera rete di Petri all'interno di una transizione di una rete di Petri di livello più alto.

L'esempio in figura rappresenta la gestione di un gruppo nel quale a ciascun membro vengono assegnati compiti diversi che possono avere una struttura complessa. La rete di Petri di livello più alto gestisce l'esecuzione del processo complessivo mentre le reti di Petri a livello più basso si riferiscono all'evoluzione dei singoli compiti con un maggiore livello di dettaglio.



Altre estensioni delle reti di Petri

Estensioni non elementari delle reti di Petri sono:

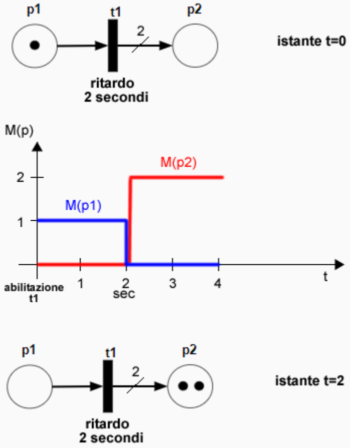
- Reti di Petri temporizzate
- Reti di Petri stocastiche
- Reti di Petri continue
- Reti di Petri ibride

Reti di Petri temporizzate: variante $\#1$

Ogni transizione rappresenta un evento, il cui verificarsi è istantaneo; ad ogni transizione si associa un intervallo di tempo (t_{min}, t_{max}); t_{min} rappresenta il tempo minimo che deve passare dall'istante in cui viene abilitata la transizione, mentre t_{max} indica il ritardo massimo rispetto all'istante di abilitazione entro il quale la transizione deve scattare, a meno che essa non venga disabilitata nel frattempo.

Reti di Petri temporizzate: variante #2

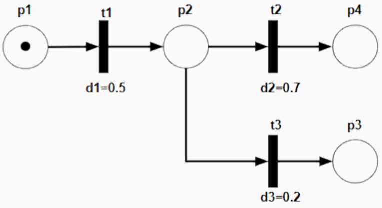
Ogni transizione rappresenta un'attività del sistema che richiede un tempo non nullo per poter essere portata a termine.



Reti di Petri temporizzate: variante $\#2$ (cont.)

Ad ogni transizione viene associata una durata e lo scatto avviene nei seguenti passi:

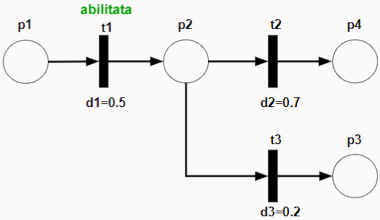
1. i gettoni vengono rimossi dai posti d'ingresso non appena la transizione viene abilitata;
2. la transizione permane nella fase di scatto per tutta la sua durata;
3. alla fine della fase di scatto, si ha la produzione di gettoni nei posti d'uscita.



Reti di Petri temporizzate: variante #2 (cont.)

Ad ogni transizione viene associata una durata e lo scatto avviene nei seguenti passi:

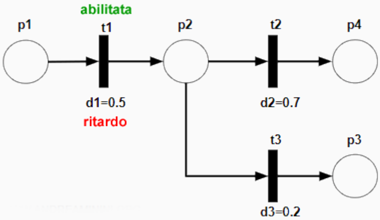
1. i gettoni vengono rimossi dai posti d'ingresso non appena la transizione viene abilitata;
2. la transizione permane nella fase di scatto per tutta la sua durata;
3. alla fine della fase di scatto, si ha la produzione di gettoni nei posti d'uscita.



Reti di Petri temporizzate: variante $\#2$ (cont.)

Ad ogni transizione viene associata una durata e lo scatto avviene nei seguenti passi:

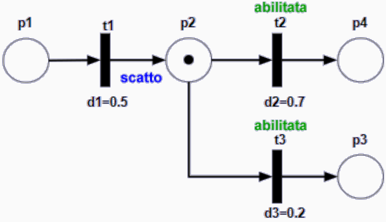
1. i gettoni vengono rimossi dai posti d'ingresso non appena la transizione viene abilitata;
2. la transizione permane nella fase di scatto per tutta la sua durata;
3. alla fine della fase di scatto, si ha la produzione di gettoni nei posti d'uscita.



Reti di Petri temporizzate: variante $\#2$ (cont.)

Ad ogni transizione viene associata una durata e lo scatto avviene nei seguenti passi:

1. i gettoni vengono rimossi dai posti d'ingresso non appena la transizione viene abilitata;
2. la transizione permane nella fase di scatto per tutta la sua durata;
3. alla fine della fase di scatto, si ha la produzione di gettoni nei posti d'uscita.



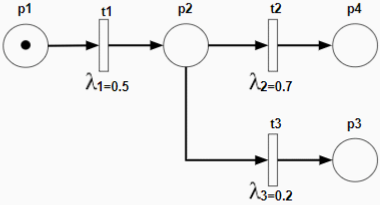
Reti di Petri temporizzate: variante $\#3$

Ogni posto rappresenta un'attività del sistema durante il suo svolgimento; ad ogni posto viene associata una durata non negativa, che indica il tempo richiesto affinchè l'attività modellata tramite il posto sia portata a compimento.

N.B.: La temporizzazione sui posti è equivalente a quella sulle transizioni. É la strada meno seguita nella letteratura dei sistemi a eventi discreti. In genere, si preferisce la struttura a temporizzazione sulle transizioni.

Quando un ritardo è modellato come una variabile casuale, o distribuzioni probabilistiche sono aggiunte al modello delle reti di Petri deterministiche per la risoluzione di conflitti, allora si parla di reti di Petri stocastiche.

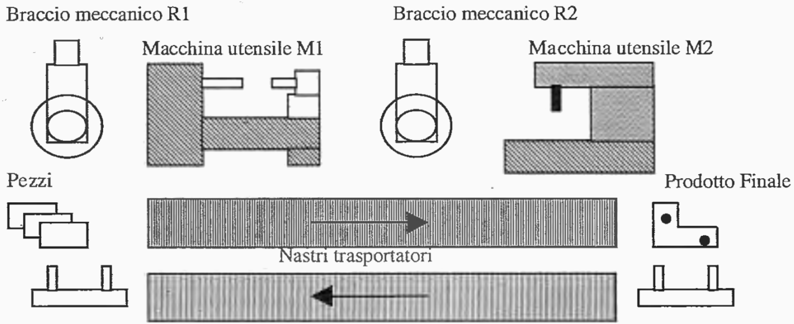
- Per convenzione i ritardi sono associati soltanto alle transizioni.
- Il ritardo è assunto essere stocastico ed esponenzialmente distribuito.
- Le transizioni stocastiche sono rappresentate con un rettangolo bianco o con un colore diverso, con indicato il parametro λ_i che determina la distribuzione di probabilità del ritardo della transizione.



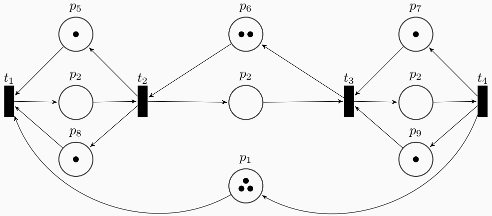
Esempio completo

Linea di produzione

La linea di produzione è composta da due macchine utensili, due bracci meccanici e due trasportatori. Ogni macchina utensile è servita da un braccio meccanico che svolge compiti di carico e scarico. Un nastro trasportatore è usato per trasportare i pezzi da lavorare, con un massimo di due per volta. L'altro nastro è utilizzato per trasportare palette vuote. Ci sono tre palette disponibili nel sistema. Ogni pezzo da lavorare è manipolato su M1 e M2, in questo ordine.



Rete di Petri



Posti	Descrizione
P_1	Palette pronte per l'utilizzo
P_2	La macchina utensile M1 sta lavorando del materiale
P_3	Materiale pronto per essere lavorato dalla macchina utensile M2
P_4	La macchina utensile M2 sta lavorando del materiale
P_5	La macchina utensile M1 pronta per l'utilizzo
P_6	Posti nel nastro trasportatore liberi
P_7	La macchina utensile M2 pronta per l'utilizzo
P_8	Il braccio meccanico R1 pronto per l'utilizzo
P_9	Il braccio meccanico R2 pronto per l'utilizzo

Trans.	Descrizione
t_1	Il braccio meccanico R1 fornisce materiale alla macchina utensile M1
t_2	Il braccio meccanico R1 muove il materiale da M1 al nastro
t_3	Il braccio maccanico R2 fornisce il materiale alla macchina utensile M2
t_4	Il braccio meccanico R2 muove il prodotto finale alla macchina M2

Matrice di incidenza, P-invarianti e T-invarianti

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\
C = & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad P_1 \\ \leftarrow \quad P_2 \\ \leftarrow \quad P_3 \\ \leftarrow \quad P_4 \\ \leftarrow \quad P_5 \\ \leftarrow \quad P_6 \\ \leftarrow \quad P_7 \\ \leftarrow \quad P_8 \\ \leftarrow \quad P_9 \end{array}
\end{array}
$$

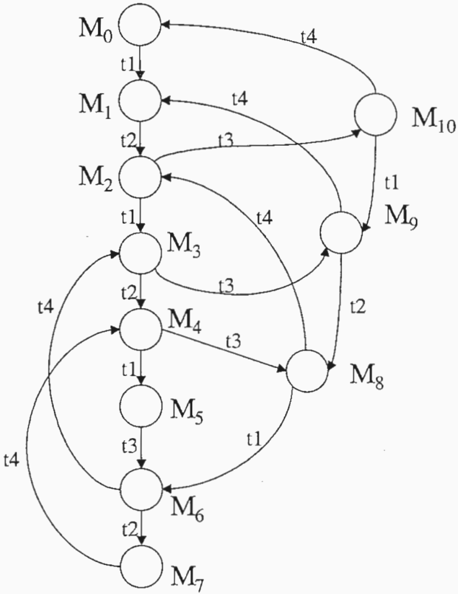
Figura 19: Matrice di incidenza

$$
\begin{array}{cccccc}
PI_1 & PI_2 & PI_3 & PI_4 & PI_5 & PI_6 \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Figura 20: P-invarianti

L'unico T-invariante è $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Grafo di raggiungibilità



Bibliografia

Riferimenti bibliografici utilizzati

- J. L. Peterson Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice-Hall, 1981
- W. Reisig Petri nets, Springer, 1985
- T. Murata Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, Proc. IEEE, April 1989
- C. Reutenauer The Mathematics of Petri Nets, Prentice-Hall, 1990 (Aspects Mathématiques des Réseaux de Petri, Masson, 1989)
- J. Desel, J. Esparza Free Choice Petri Nets, Cambridge U.P., 1995
- A. Di Febbraro, A. Giua Sistemi a Eventi Discreti, McGraw Hill, 2002
- L. Ferrarini Automazione Industriale: Controllo Logico con Reti di Petri, Pitagora, 2002
- J. Cortadella, M. Kishinevsky, A. Kondratyev, L. Lavagno, A. Yakovlev Logic Synthesis of Asynchronous Controllers and Interfaces, Springer Verlag, 2002