

# **INFORMATICA DI BASE**

## **- 6 crediti -**

**Docente: Michele Piana**

**Email: [michele.piana@univr.it](mailto:michele.piana@univr.it)**

**URL: <http://www.di.univr.it/~piana>**

**Ricevimento: Lunedì ore 14:00 – 15:00**

**Studio: 2.05 (Ufficio del Preside)**

# Una citta', un giorno, un'ora



Vienna, Istituto di Matematica dell'Universita'  
Strudlhofgasse, 1

Tutti i giovedì alle ore 18, dal 1924 al 1933

# Il Circolo di Vienna

**Principio di verifica:** sono dotate di significato solo le proposizioni verificabili empiricamente

**Superamento della metafisica:** poiche' sono autentiche soltanto le proposizioni che permettono un confronto diretto tra linguaggio e realta', le proposizioni della metafisica sono del tutto prive di senso

**Fisicalismo:** una proposizione e' vera se e' coerente con il sistema linguistico in cui e' inserita

# PROTAGONISTI - I

- ✍ Hans Hahn
- ✍ Moritz Schlick
- ✍ Karl Menger
- ✍ Otto Neurath
- ✍ Rudolf Carnap
- ✍ ...

# PROTAGONISTI – II: LUDWIG BOLTZMANN (1844-1906)

Per una teoria dei modelli scientifici:



- La scienza non cattura la realta' della natura ma offre modelli della natura
- I modelli cambiano con le teorie e devono essere: liberi da contraddizioni logiche, soggetti a controllo empirico, ricchi di informazione, non ridondanti

# PROTAGONISTI – III: LUDWIG WITTGENSTEIN (1889-1951)



Per una teoria raffigurativa del linguaggio:

- le proposizioni del linguaggio sono analoghe a una serie raffigurazioni
- le proposizioni linguistiche sono significative quando possono essere correlate con il mondo
- la relazione fra le proposizioni linguistiche e la realtà può essere mostrata ma non espressa nei termini del linguaggio stesso

# PROTAGONISTI – IV:

## LUDWIG WITTGENSTEIN (1889-1951)



1. C'e' un mondo che vogliamo descrivere
2. Vogliamo descriverlo usando un qualche linguaggio
3. C'e' il problema di stabilire se cio' che diciamo del mondo corrisponde a come il mondo e' realmente
4. Le parole di un linguaggio non possono esprimere questa corrispondenza perche' altrimenti cadremmo nel regresso infinito di descrizioni di descrizioni di descrizioni...

# PROTAGONISTI – IV

## BERTRAND RUSSELL (1872-1970)

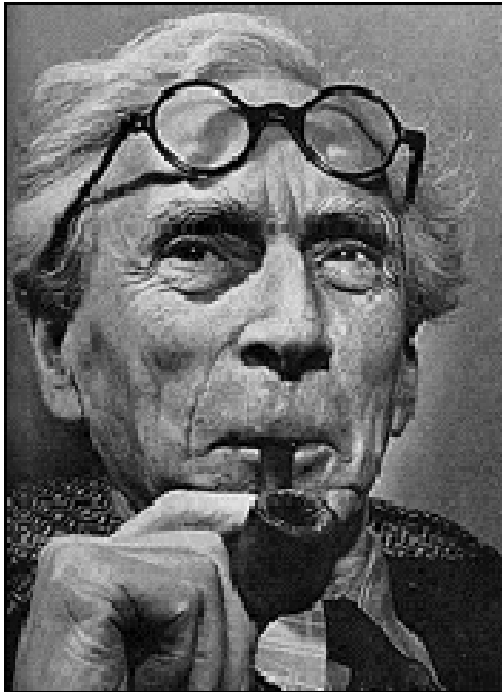


Photo credit: Larry Burrows

I *Principia Mathematica* descrivono tutte le asserzioni dell'aritmetica attraverso l'uso dei simboli della logica

La questione cruciale per un sistema logico-formale e' la questione della coerenza



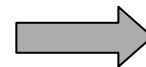
# PARADOSSI - I

Se  $2+2=5$  allora Bertrand Russell e' il Papa

$$2+2=5 \longrightarrow 2=3 \longrightarrow 3=2 \longrightarrow 2=1$$

Russell e il Papa sono due  
persone

$$2=1$$



Russell e il Papa  
sono la stessa  
persona

## PARADOSSI - II

Il barbiere del villaggio rade tutti gli abitanti del villaggio che non si radono da se':

chi rade il barbiere?

# PREOCCUPATI?

I metodi standard per eseguire inferenze logiche sono troppo deboli per risolvere il paradosso del barbiere

I metodi che vengono utilizzati per costruire le dimostrazioni matematiche si basano sui metodi standard per eseguire inferenze logiche

La matematica e' coerente?

# UNA GRANDE DEDIZIONE...

Ludwig Boltzmann muore suicida il 5 ottobre 1906 deluso dagli attacchi di scienziati che non credevano alla sua visione microscopica della materia

Moritz Schlick fu ucciso il 22 settembre 1936 da uno studente che contestava le tesi sostenute in un suo saggio

Il 25 ottobre 1946, a Cambridge, Karl Popper diede un seminario dal titolo: “Esistono problemi filosofici?”. Wittgenstein, che non era d'accordo con le sue argomentazioni, lo minaccio' con un attizzatoio

# ANCORA UNA CITTA', UN GIORNO, UN'ORA



Bologna, 3 settembre 1928:

David Hilbert apre il Congresso Internazionale dei Matematici invitando a preoccuparsi della coerenza logica della matematica:

“Ogni problema matematico definito deve necessariamente essere suscettibile di una soluzione esatta, o nella forma di una vera e propria risposta alla domanda posta, o mediante la dimostrazione dell'impossibilit  della sua soluzione”

**Wir muessen wissen  
Wir werden wissen**

# UN MONDO DI TORTE DI CIOCCOLATA



sachertorte



demeltorte



waffeltorte

# MTC

Un Macchina per le Torte di Cioccolato (MTC) e' un pasticciere automatico che processa gli ingredienti secondo le istruzioni contenute nella ricetta e serve la torta di cioccolata nel vassoio di uscita

Due condizioni imprescindibili:

- Affidabilita': la MTC deve produrre soltanto Torte di Cioccolata (TC)
- Totalita': la MTC deve essere in grado di produrre una qualsiasi TC concepibile

# POSIZIONE DEL PROBLEMA - I

- Test per le TC: una torta e' una vera TC se supera il test
- Ricetta per le TC: una torta supera il test per le TC se esiste una ricetta che, se implementata, produrrebbe una TC



# POSIZIONE DEL PROBLEMA - II

Verita' = tutte le torte concepibili che soddisfano il test  
per la cioccolata

Dimostrazioni = tutte le ricette per produrre  
effettivamente TC con la MTC

Ecco la Grande Domanda:

# POSIZIONE DEL PROBLEMA - III

Esiste una ricetta per qualunque torta di  
cioccolata concepibile?

ovvero

Ci sono, nell'universo delle torte di cioccolato,  
delle torte di cioccolato per le  
quali non esiste ricetta?

ovvero

Se un oggetto supera il test per le torte di cioccolato,  
puo' essere prodotto da una Macchina per le Torte  
di Cioccolata?

# **POSIZIONE DEL PROBLEMA - IV**

ovvero

Ogni asserzione vera in un sistema formale e'  
dimostrabile all'interno del sistema formale?

**LA RISPOSTA E' NO!!!**

# KURT GOEDEL (1906-1978)



Il piu' grande logico dopo Aristotele

Contributi fondamentali in:

- Teoria dei numeri
- Fisica teorica
- Informatica teorica
- Cosmologia

# PRIMA GRANDE IDEA

Un qualunque sistema formale che si proponga di includere l'aritmetica e' rappresentabile all'interno dell'aritmetica stessa

Piu' in particolare: una qualunque formula logica che riguarda i numeri e' rappresentabile attraverso un numero

# PRIMA GRANDE IDEA: ESEMPIO

Formula logica:  $(?x)(x ? sy)$

segno	numero	significato
?	1	esiste
=	2	uguale
x	3	numero
y	4	altro numero
s	5	successore immediato
(	6	parentesi sinistra
)	7	parentesi destra

Risultato: 6137632547

# SECONDA GRANDE IDEA

La sostituzione del concetto di verità con il concetto di dimostrabilità permette di codificare le asserzioni logiche autoreferenziali in asserzioni espresse nel linguaggio dell'aritmetica

## **SECONDA GRANDE IDEA: ESEMPIO**

Si tratta di sostituire il paradosso di Epimenide

Questo enunciato e' falso

Con una sua versione 'a la Godel':

Questa asserzione non e' dimostrabile



# TEOREMA DI GOEDEL (1930)

Per ogni formalizzazione coerente dell'aritmetica,  
esistono asserzioni aritmetiche che non sono  
dimostrabili all'interno del sistema formale

# SCHEMA DI DIMOSTRAZIONE

**Numerazione:** ogni formula logica e' codificata in un'asserzione intorno ai numeri naturali

**Paradosso:** dimostrabilita' sostituisce verita'

**Enunciato:** l'enunciato 'questa asserzione e' indimostrabile' ha una sua controparte aritmetica

**Incompletezza:** in un sistema coerente la controparte aritmetica e' vera

**Clausola:** se aggiungo assiomi e formo un sistema in cui la controparte aritmetica e' falsa, trovo comunque un altro enunciato indimostrabile

# CHI ERA KURT GOEDEL?

- Il miglior amico di Albert Einstein



- Approccio logico alla Costituzione americana
- Fantasmi e termosifoni

# UN FIGLIO DELL'IMPERO



Alan Turing nasce nel 1906  
a Londra

Nel 1930 e' fellow a Cambridge

Nel 1935 scopre il Teorema di  
Goedel e non lo abbandona piu'

Durante la seconda guerra  
mondiale risolve il segreto di  
Enigma

# IL PROCESSO DI CALCOLO

Consideriamo la moltiplicazione:

$$\begin{array}{r} 4231 \times \\ 77 = \end{array}$$

Quali sono i processi mentali essenziali  
per eseguire il calcolo?

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ 29617 \\ 29617 \\ \text{-----} \\ 325787 \end{array}$$

1. A ogni stadio del calcolo l'attenzione e' rivolta solo a pochi simboli
2. A ogni stadio l'azione intrapresa dipende solo da quei simboli su cui si focalizza l'attenzione e dallo stato mentale dell'esecutore in quel momento

# LA MACCHINA DI TURING - I

Un nastro infinitamente lungo diviso in quadratini, ognuno dei quali contiene uno fra un insieme finito di simboli



Un dispositivo di lettura-scrittura che si può trovare in un insieme finito di stati a ogni passo del processo computazionale

Il dispositivo di lettura-scrittura può leggere i simboli nei quadratini del nastro e scrivere uno dei simboli in ciascun quadratino

# MACCHINA DI TURING - II

Il comportamento della macchina di turing e' controllato da un programma composto da un insieme finito di istruzioni scelte tra sette possibilita':

1. cambiare lo stato del dispositivo di lettura-scrittura
2. mantenere lo stato del dispositivo di lettura-scrittura
3. stampare un nuovo simbolo sul quadratino in cui si trova il dispositivo
4. conservare il vecchio simbolo sul quadratino in cui si trova il dispositivo
5. spostarsi a sinistra di un quadratino
6. spostarsi a destra di un quadratino
7. fermarsi

# LA MACCHINA DI TURING - III

Una macchina di Turing per l'addizione:

- Tre stati: A, B, C
- Due simboli: 0,1
- Programma per l'addizione:

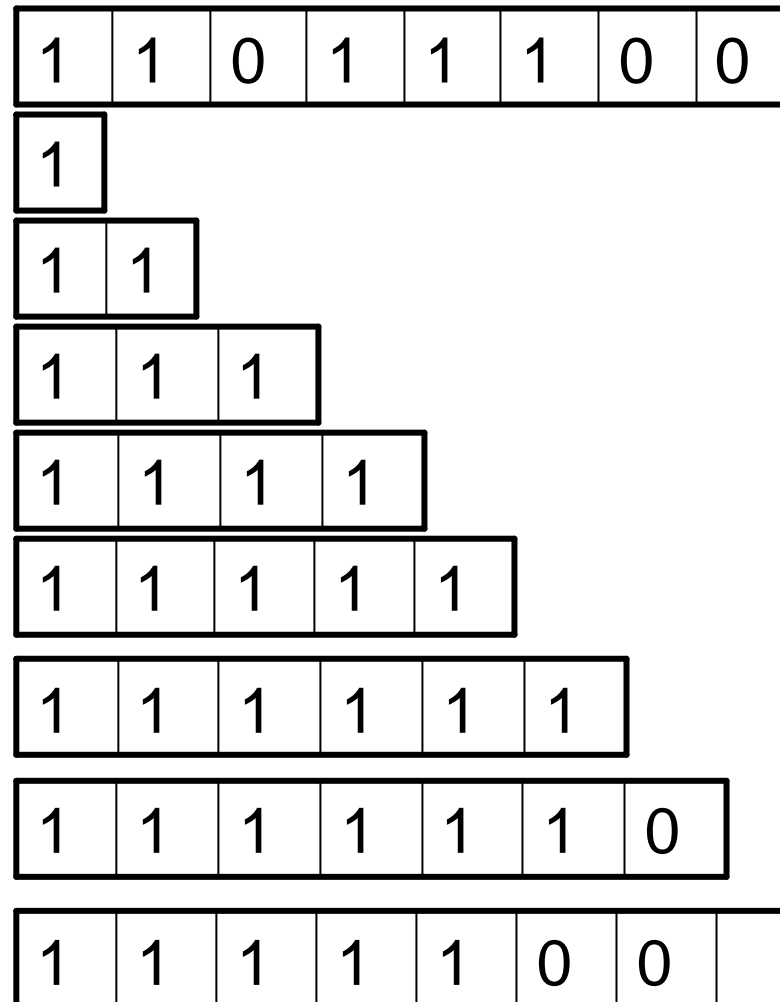
	1	0
A	1,D,A	1,D,B
B	1,D,B	0,S,C
C	0,STOP	STOP



# MACCHINA DI TURING - IV

2+3=?

	1	0
A	1,D,A	1,D,B
B	1,D,B	0,S,C
C	0, STOP	STOP



# LA MACCHINA DI TURING - V

La macchina di Turing e' un oggetto matematico formale

La macchina di Turing e' una rappresentazione  
del concetto di algoritmo

Qualsiasi algoritmo eseguibile su un qualsiasi dispositivo  
di calcolo puo' essere eseguito dalla macchina di Turing

# IL PROBLEMA DELL'ARRESTO

Esiste una procedura che ci dice in anticipo  
se un programma si fermerà dopo  
un numero finito di passi?

Formalmente:

Dato un programma  $P$  per una macchina di Turing  
e un insieme di dati di input  $I$ , esiste un  
programma  $Q$  che accetta  $P$  e  $I$  come input e ci  
dice se  $P$  si fermerà o meno dopo un numero  
finito di passi con  $I$  come input?

# GOEDEL E TURING

**Teorema di Godel:** per ogni sistema formale che si proponga di decidere tutte le asserzioni dell'aritmetica, esiste una proposizione aritmetica che non puo' essere ne' dimostrata ne' refutata all'interno del sistema stesso

**Teorema dell'arresto:** per ogni programma Q per una macchina di Turing che si proponga di decidere se un qualunque programma per una macchina di Turing si ferma o non si ferma, esistono un programma P e un input I tali che Q non riesce a determinare se P si arresta o meno quando elabora i dati I

# UN PO' DI BIBLIOGRAFIA

**M. Davis**, *Il calcolatore universale*, Adelphi

**J. L. Casti e W. DePauli**, *Goedel*, Raffaello Cortina

**D. Hofstadter**, *Goedel, Escher, Bach*, Adelphi