TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Appello straordinario $\boxed{\text{19 febbraio 2013}}$

DIFFERENTIAL GEOMETRY AND TOPOLOGY – 1st module

Intermediate exam $\boxed{\text{19th February 2013}}$

Prof. M. Spera

(1) In $U = \{(r, \vartheta, \varphi) \mid r > 0,\ \vartheta \in (0,\pi),\ \varphi \in (0, 2\pi)\}$

sia data $\omega = r^2 \sin\vartheta \, dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi$.

Posto $X = f(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$, determinare f in modo che

$\mathcal{L}_X \omega = 0$ (Procedere in più modi). Si interpreti geometricamente il risultato

(2) In $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, sia $\omega = x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz$.

Dimostrare che $\omega = 0$ dà luogo ad una distribuzione integrabile e e si determinino le relative varietà integrali. Punto per punto si determini poi una base di campi vettoriali commutanti generanti la distribuzione data.

(3) Dare la definizione di spazio tangente ad una varietà liscia in un punto, fornendo i dettagli necessari.

(4) [solo Topologia e Geometria differenziale]
Definire la successione di Mayer-Vietoris. Fornirne qualche applicazione

Tempo a disposizione 1h.15 (Diff. geom & top: 1h)

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

(1) $\omega = r^2 \sin\vartheta \, dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi$

(forma di volume in coord. sferiche)

$X = f(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}$ $\qquad \mathcal{L}_X \omega = d(i_X\omega) + i_X \underbrace{d\omega}_{=0}$

$$(i_X\omega)(Y,Z) = (r^2 \sin\vartheta \, dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi)\left(f\frac{\partial}{\partial\varphi}, Y, Z\right)$$

$$\ldots = +r^2 \sin\vartheta f \, (dr \wedge d\vartheta)(Y,Z)$$

$$i_X \omega = r^2 \sin\vartheta \cdot f \cdot dr \wedge d\vartheta$$

$$d(i_X\omega) = d(r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot f(\varphi)) \, dr \wedge d\vartheta$$

$$\ldots = r^2 \sin\vartheta \, \frac{df}{d\varphi} \, d\varphi \wedge dr \wedge d\vartheta \qquad = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{df}{d\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = c \qquad (\text{cost.})$$

X genera una rotazione attorno all'asse z ...

Variante: $\mathcal{L}_X (r^2 \sin\vartheta \, dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi) =$

$$= \underbrace{\mathcal{L}_X(r^2\sin\vartheta)}_{=0} dr \wedge d\vartheta \wedge d\varphi + r^2 \sin\vartheta \underbrace{(\mathcal{L}_X dr)}_{= d\mathcal{L}_X r = 0} \wedge d\vartheta \wedge d\varphi$$

$$+ r^2 \sin\vartheta \, dr \wedge (\overbrace{\mathcal{L}_X d\vartheta}^{= \ldots = 0}) \wedge d\varphi$$

$$+ r^2 \sin\vartheta \, dr \wedge d\vartheta \wedge \underbrace{\mathcal{L}_X d\varphi}_{= d\mathcal{L}_X \varphi = d\, X(\varphi) = df}$$

$\Rightarrow$ ancora $df = 0$

(2) $\omega = x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz = 0$

È subito visto che $\omega = df$, $f = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + c$

$\Rightarrow$ varietà integrali : $f = c$ (cost.)

Coerentemente $\omega \wedge d\omega = df \wedge d^2 f = 0$

Base: $(x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz)\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}\right) = 0$

$\alpha, \beta, \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$$

Poniamo $\alpha = 1$, $\beta = 0$ $\Rightarrow$ $\gamma = -\frac{\alpha x^2}{z^2}$;

e successivamente $\alpha = 0$, $\beta = 1$ $\Rightarrow$ $\gamma = -\frac{\alpha y^2}{z^2}$

$$\Rightarrow \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x^2}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{y^2}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}$$

Si vede che $[X_1, X_2] = \ldots = + \frac{x^2}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y^2}{z^2}\right)\frac{\partial}{\partial z} - \frac{y^2}{z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{z^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}$

$$= \frac{x^2 y^2}{z^2}\underbrace{\left(-2 \cdot z^{-3}\right)}_{\frac{\partial z^{-2}}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{x^2 y^2}{z^2}\left(-2 z^{-3}\right)\frac{\partial}{\partial z} = 0$$