Esercitazione su domini di funzioni

Davide Boscaini

Queste sono le note da cui ho tratto le esercitazioni del giorno 15 Novembre 2012. Come tali sono ben lungi dall'essere esenti da errori, invito quindi chi ne trovasse a segnalarli presso davide.boscaini@studenti.univr.it.

Esercizio 1. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{|x| - 2}.$$

Soluzione. Se $x \geq 0$, allora possiamo ricondurci allo studio del dominio della funzione $g(x) = \sqrt{x-2}$. Come noto la radice quadrata è definita per valori non negativi del suo argomento, quindi il dominio di g è $x - 2 \geq 0$, cioè $x \geq 2$. Intersecando la soluzione trovata con $x \geq 0$ si ottiene ancora $x \geq 2$.

Se invece $x < 0$, allora possiamo ricondurci allo studio del dominio della funzione $h(x) = \sqrt{-x-2}$. Ora il dominio di h è $-x - 2 \geq 0$, cioè $x \leq -2$. Intersecando la soluzione trovata con $x < 0$ si ottiene ancora $x \geq 2$.

Concludiamo quindi che

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \, .$$

Esercizio 2. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\log x + 1}.$$

Soluzione. Il logaritmo è ben definito per valori del suo argomento strettamente positivi, pertanto in questo caso la condizione da imporre è $x > 0$. Per quanto riguarda invece la radice quadrata la condizione da imporre è $\log x + 1 \geq 0$, cioè $x \geq 1/e$. L'intersezione tra le due condizioni trovate da ancora $x \geq 1/e$, pertanto

$$\mathrm{Dom}(f) = [1/e, +\infty) \, .$$

Esercizio 3. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \sin\left(x - \sqrt{1-2x}\right).$$

Soluzione. La funzione seno è definita per ogni valore reale del suo argomento, pertanto non ci dà problemi. Per la radice, come abbiamo fatto finora, poniamo $1 - 2x \geq 0$, cioè $x \leq 1/2$. Quindi

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 1/2] \, .$$

Esercizio 4. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(2-x) - \log(x+1)}.$$

Soluzione. Prendiamo in esame il primo logaritmo e imponiamo che il suo argomento sia strettamente positivo, cioè $x < 2$. Facciamo lo stesso per il secondo logaritmo, imponendo $x > -1$. Infine, affinché la radice quadrata sia ben definita, poniamo

$$\log(2-x) - \log(x+1) \geq 0.$$

Da cui ricaviamo $\log(2-x) \geq \log(x+1)$ ed applicando la funzione esponenziale ad ambo i membri troviamo $2 - x \geq x + 1$, da cui troviamo $x \leq 1/2$.

Intersecando le tre condizioni fin qui trovate si trova

$$\mathrm{Dom}(f) = (-1, 1/2]\,.$$

Esercizio 5. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = (\log 2x)^{\operatorname{arsin} x}.$$

Soluzione. Il logaritmo è ben definito per argomenti strettamente positivi, quindi la prima condizione da imporre è $2x > 0$. L'arcoseno invece è definito per $-1 \leq x \leq 1$. Infine l'elevamento a potenza è definito per qualsiasi esponente reale a patto che la base sia positiva, quindi la terza,ed ultima, condizione da imporre è $\log(2x) > 0$, cioè $2x > 1$. Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x > 0, \\ -1 \leq x \leq 1, \\ 2x > 1, \end{cases}$$

che ha soluzione per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $1/2 < x \leq 1$. Concludiamo quindi che

$$\mathrm{Dom}(f) = (1/2, 1]\,.$$

Esercizio 6. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = (x-1)^{\sqrt{3-2x}}.$$

Soluzione. Per quanto riguarda l'esponente la condizione da imporre affinché la radice quadrata sia ben definita è $3 - 2x \geq 0$, cioè $x \leq 3/2$. Dal momento che abbiamo a che fare con una potenza ad esponente reale, la condizione da imporre riguardo la base è che essa sia strettamente positiva. Quindi, in questo caso, $x - 1 > 0$, cioè $x > 1$. Intersecando le due soluzioni troviamo

$$\mathrm{Dom}(f) = (1, 3/2]\,.$$

Esercizio 7. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = (|2\sin x - 1| - 1)^x,$$

per $x \in [0, 2\pi]$.

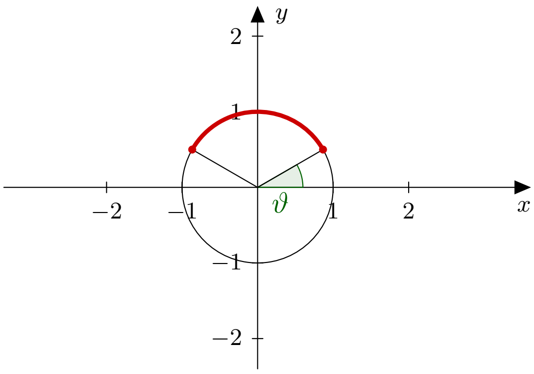
Soluzione. Abbiamo a che fare ancora una volta con una potenza ad esponente reale, perciò dobbiamo chiedere che la base sia strettamente positiva, cioè

$$|2\sin x - 1| > 1.$$

Dalla definizione di valore assoluto troviamo

$$\begin{cases} 2\sin x - 1 > 1, & \text{se } 2\sin x - 1 \geq 0, \\ -2\sin x + 1 > 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Ora, per prima cosa capiamo quando è soddisfatta la condizione $2\sin x - 1 \geq 0$, cioè $\sin x \geq 1/2$. Tale condizione è soddisfatta per $\vartheta = \pi/6 \leq x \leq 5\pi/6$, come rappresentato in figura.



Passiamo ora a capire quando è soddisfatta la condizione $2\sin x - 1 > 1$, cioè $\sin x > 1$. Tale condizione evidentemente non è soddisfatta da nessun valore reale, pertanto non è mai soddisfatta. Intersecando la condizione $\pi/6 \leq x \leq 5\pi/6$ con l'insieme vuoto si ottiene ancora l'insieme vuoto.

I valori che soddisfano la condizione $2\sin x - 1 < 0$ si possono ricavare facilmente in quanto appartenenti all'insieme complementare della precedente condizione $\pi/6 \leq x \leq 5\pi/6$. In particolare essi appartengono all'insieme $0 \leq x \leq \pi/6 \;\cup\; 5\pi/6 \leq x \leq 2\pi$.

Passiamo ora a capire quando è soddisfatta la condizione $-2\sin x + 1 > 1$, cioè $\sin x < 0$. Tale condizione è banalmente soddisfatta per $\pi < x < 2\pi$. Intersecando la condizione $0 \leq x \leq \pi/6 \;\cup\; 5\pi/6 \leq x \leq 2\pi$ con $\pi < x < 2\pi$ si ottiene ancora $\pi < x < 2\pi$.

Unendo l'insieme vuoto con $\pi < x < 2\pi$ si ottiene

$$\mathrm{Dom}(f) = (\pi, 2\pi).$$

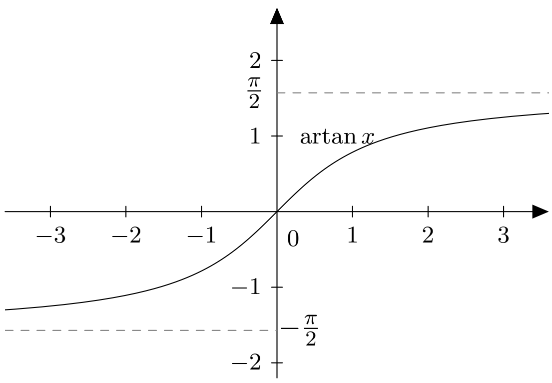
Esercizio 8. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \operatorname{artan}\sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}.$$

Soluzione. Quando la funzione comprende una radice di indice pari la prima cosa di cui accertarsi è che il suo argomento non sia negativo, chiediamo cioè che

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq 0,$$

cioè per il numeratore chiediamo che $e^x \geq 1$, cioè $x \geq 0$, mentre per il denominatore chiediamo $e^x > -1$, condizione che è sempre verificata. Segue quindi che il dominio o campo di esistenza dell'argomento dell'arcotangente è $x \geq 0$. Osservando poi che l'arcotangente è una funzione definita su tutto l'asse reale con grafico



possiamo quindi concludere che

$$\mathrm{Dom}(f) = [0, +\infty).$$

Esercizio 9. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}.$$

Soluzione. Quando la funzione comprende una frazione la prima cosa di cui accertarsi è che il denominatore sia diverso da zero, chiediamo cioè che

$$1 - \cos x \neq 0,$$

cioè $\cos x \neq 1$ e dalla trigonometria sappiamo che questo accade per $x \neq 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Il dominio di questa funzione è rappresentato quindi dal piano privato delle rette verticali aventi per ascissa multipli interi di 2π, come rappresentato in figura