EX 1 fila B   Analisi Matematica I   24 luglio 201[illegible]

Enunciare il teorema di Lagrange ed illustrarlo graficamente
Verificare, usando Lagrange, la disuguaglianza

$$\log(1+4x) \leq 4x \qquad \forall x > -\frac{1}{4}$$

giustificando i passaggi.

Ris

Teorema di Lagrange

f continua in $[a,b]$, f derivabile in (a,b)

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (a,b)$ t.c. $f(b)-f(a) = f'(\bar{x})(b-a)$

Se un arco di curva continua è dotato di retta tangente in ogni suo punto interno, esiste almeno un punto interno all'arco nel quale la tangente è parallela alla corda (secante) che congiunge i punti estremi dell'arco.

Fisso $x > -\frac{1}{4}$, applico il teorema di Lagrange alla funzione

$f(t) = \lg(1+4t)$ in $[0,x]$ (o in $[x,0]$) (f continua in $[0,x]$, f derivabile in $(0,x)$)

Risulta: $\lg(1+4x) - \lg(1) = \frac{1}{1+4\bar{x}} \cdot 4 \cdot x$, $\exists\, \bar{x} \in (0,x)$

i) Considero $x \geq 0 \Rightarrow \frac{4x}{1+4\bar{x}} \leq 4x$.

ii) Considero $-\frac{1}{4} < x < 0$, $\bar{x} \in (x,0) \Rightarrow \begin{array}{l} -1 < 4x < 0 \\ 4x < 4\bar{x} < 0 \end{array} \Big| \Rightarrow 0 < 1+4\bar{x} < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+4\bar{x}} \geq 1 \underset{\text{moltiplico per } x<0}{\Rightarrow} \frac{4x}{1+4\bar{x}} < 4x$. Quindi $\frac{4x}{1+4\bar{x}} < 4x$ se $x \in (-\frac{1}{4}, 0)$

$$\forall x > -\frac{1}{4} \qquad \lg(1+4x) \underset{\uparrow}{=} \frac{4x}{1+4\bar{x}} \leq 4x.$$

$\exists\, \bar{x} \in (0,x)$ o $\bar{x} \in (x,0)$

Studiare nell'intervallo $[0,2\pi]$ la funzione

$$f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$$

Ris

Dominio $1-\sin x \neq 0$ $\quad x\neq \frac{\pi}{2}$ $\quad A=[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},2\pi]$

Intersezione assi

$\begin{cases} x=0 \\ f(x)=\frac{1}{1-0}=1 \end{cases}$ $(0,1)$; $\begin{cases} y=0 \\ \frac{\cos x}{1-\sin x}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ \cos x=0 \end{cases}$ $x=\frac{3}{2}\pi \in A \Rightarrow (\frac{3}{2}\pi,0)$; $x=\frac{\pi}{2}\notin A$

Segno

$1-\sin x>0 \quad \forall x\in A \Rightarrow f(x)>0$ sse $\cos x>0$

$f(x)>0$ sse $0\le x<\frac{\pi}{2} \cup \frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{0}{0}$ f.i.

Sono verificate le ip. del Teorema di De l'Hôpital $\Rightarrow$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}} \frac{-\sin x}{-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{\pm}} \operatorname{tg} x=\mp\infty \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale

$f(0)=1$ (già visto) $\quad f(2\pi)>0$

$f'(x)=\frac{-\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}$

$f'(x)\neq 0$

$f'(x)>0 \quad \forall x\in A \Rightarrow$ in $[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},2\pi]$ f è crescente

f': 0 $+$ $\pi/2$ $+$ 2π

f: $\nearrow$ $\nearrow$

no minimi relativi, no max relativi

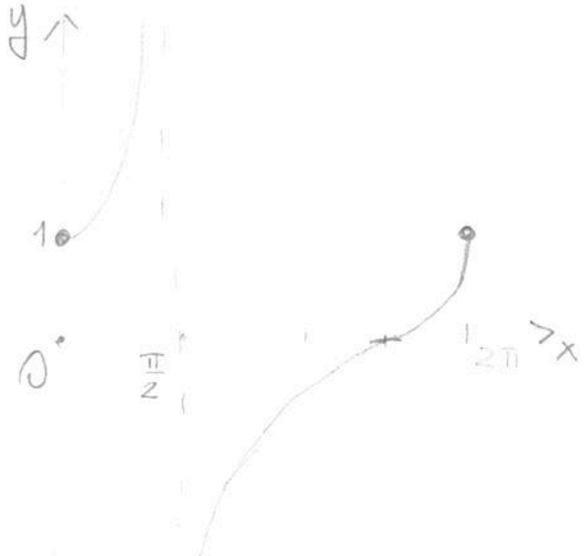
$f''(x)=\frac{+\cos x}{(1-\sin x)^2}$

$f''(x)>0$ per $0\le x<\frac{\pi}{2} \cup \frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi$

f'': 0 $+$ $\pi/2$ $-$ $3/2\pi$ $+$ 2π

f: $\cup$ $\cap$ flesso $\cup$

flesso $(\frac{3}{2}\pi,0)$



EX 3 file b   Analisi Matematica I   24 luglio 2013

Calcolare, se $\exists$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{3\sqrt{|x^2-1|}}\,dx$

Definire l'integrale in senso improprio su un intervallo limitato

Enunciare i teoremi di esistenza dell'integrale improprio.

Ris

Def. $f:(a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall\, a<x<b \quad \exists \displaystyle\int_x^b f(x)dx$

f ha integrale improprio convergente se $\exists$ finito $\displaystyle\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)dt$.

In tal caso si pone $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt.$

Teorema

Sia $f:(a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad \exists \displaystyle\int_x^b f(t)dt \quad \forall\, a<x<b$

i) se f è limitata in $(a,b]$ $\Rightarrow \exists \displaystyle\int_a^b f(t)dt$

ii) se $\exists$ finito $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow \exists\int_a^b f(t)dt$

iii) se $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ di ordine α con $\alpha<1 \Rightarrow \exists\int_a^b f(t)dt$.

(di ordine α con $\alpha\geq 1 \Rightarrow \nexists \displaystyle\int_a^b f(t)dt$).

$f(x)=\dfrac{x}{3\sqrt{|x^2-1|}}$ è definita in $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

in $(-1,1)$ $x^2-1<0 \Rightarrow$ in $(-1,1)$ $f(x)=\dfrac{x}{3\sqrt{1-x^2}}$

$\forall x \mid -1<x\leq 0$ f cont. $\Rightarrow \exists \displaystyle\int_x^0 f(t)dt.$

$$\int \frac{x}{3\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{3}\int\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{6}_{3}}\sqrt{1-x^2}+c = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+c$$

$$\int_x^0 f(t)dt = -\frac{1}{3}\sqrt{1-t^2}\Big|_x^0 = -\frac{1}{3}(1)+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to -1}\int_x^0 f(t)dt = \lim_{x\to -1}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\right) = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f(x)dx = -\frac{1}{3}.$$