Capitolo 1

Esercizi

1.1 Esercizi e domande d'esame

1. Dare le definizioni di problema ben condizionato e mal condizionato. Dare la definizione di numero di condizionamento relativo.

   E' vero che in un problema mal condizionato a tutte le piccole perturbazioni del dato iniziale corrispondono delle grandi variazioni dell'uscita?

   ☐ vero ☐ falso

2. Si consideri il sistema floating point $\mathbb{F} = (10, 3, -2, 1)$.

   (a) Calcolare quanti numeri macchina contiene $\mathbb{F}$.

   (b) Considerando solo i numeri macchina positivi di $\mathbb{F}$, calcolare il più grande ed il più piccolo numero macchina (normalizzato).

   (c) Calcolare la precisione di macchina di $\mathbb{F}$.

   (d) Indicare quali delle seguenti operazioni tra numeri macchina di $\mathbb{F}$ non dà errore di arrotondamento:

   $$\text{(i)}\ \ 0.230 + 0.104 - 0.112, \qquad \text{(ii)}\ \ 0.230 \times 0.130, \qquad \text{(iii)}\ \ \frac{0.124}{0.125}$$

   Riportare anche i risultati di ciascuna operazione.

   (e) Fornire un esempio di operazione aritmetica che dà come risultato 'overflow'.

3. Dare la definizione di precisione di macchina per il sistema floating point $\mathbb{F} = (\beta, t, L, U)$. Dato $\epsilon \in \mathbb{F}$, è vero che $1 + \epsilon > 1$ per ogni $\epsilon > 0$? Giustificare.

4. Si consideri il problema della valutazione della funzione

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1$$

per $x \approx 0$.

   (a) Calcolare il numero di condizionamento del problema e dire se il problema è o meno ben condizionato.

   (b) Dopo aver osservato che la formula che esprime f (algoritmo) non è stabile quando usiamo un sistema floating point, proporre un altro algoritmo stabile per il calcolo di $f(x)$.

5. Si consideri il problema del calcolo dell'approssimazione dello zero α dell'equazione $f(x) = 0$ mediante un metodo iterativo che produce la successione x_n convergente ad α. Mostrare graficamente una situazione nella quale il test di arresto basato sul residuo $|f(x_n)| < toll$ è valido ed un'altra situazione nel quale non lo è.

6. Calcolare il numero di iterazioni necessarie al metodo di bisezione per approssimare con un errore inferiore a 10^{-6} la radice di $4x - 6 = 0$ partendo dall'intervallo iniziale $[1, 3]$. Calcolare, inoltre, l'errore effettivamente commesso quando il metodo soddisfa il test di arresto.

7. Calcolare il numero di iterazioni necessarie al metodo di bisezione per approssimare con un errore inferiore a 10^{-6} la radice di $5x - 6 = 0$ partendo dall'intervallo iniziale $[1, 3]$. Calcolare, inoltre, l'errore effettivamente commesso quando il metodo soddisfa il test di arresto.

8. E' vero che nel metodo di bisezione si ha una riduzione monotona dell'errore? Se sì, dimostrarlo, altrimenti fornire un controesempio.

9. Fornire la definizione di ordine di convergenza di un metodo iterativo per il calcolo dell' zero dell'equazione $f(x) = 0$. Illustrare l'aspetto qualitativo dei grafici relativi all'andamento della convergenza lineare e quadratica (ossia, che riportano in scala semilogaritmica l'andamento dell'errore).

10. Assumendo di avere due metodi iterativi lineari con costanti asintotiche dell'errore $M_1 = 0.5$ e $M_2 = 0.1$, quale dei due risulterà più veloce? Quale può essere una stima ragionevole del numero di iterazioni richieste al metodo con M_2 per avere un errore pari a 10^{-6} l'errore iniziale?

11. Illustrare, dal punto di vista geometrico, il metodo di Newton con riferimento al calcolo della radice semplice dell'equazione $f(x) = 0$. In particolare, ricavare la formula di aggiornamento che dà x_{n+1} in funzione di x_n.

12. Si consideri il metodo di Newton per il calcolo della radice dell'equazione $\ln(x) = 0$ partendo da $x_0 = 0.5$. Calcolare le prime quattro iterate del metodo, i corrispondenti errori, le stime della costante asintotica ottenute da $|e_{n+1}|/|e_n|^2$ confrontandole con il valore teorico.

13. Quante iterazioni sono necessarie al metodo di Newton per calcolare la radice dell'equazione $3x - 7 = 0$ con un errore inferiore a 10^{-6}?

14. Determinare l'ordine di convergenza del metodo di Newton per calcolare la radice dell'equazione $\cos(x) - x = 0$. E' vero che la successione x_n generata dal metodo è monotona decrescente partendo da $x_0 = 0$?

15. Qual è l'ordine di convergenza del metodo di Newton per il calcolo della radice $x = 1$ dell'equazione $(x-1)^2 = 0$? Proporre un metodo con ordine di convergenza maggiore del precedente.

16. Ricavare il test di arresto basato sugli scarti per il metodo di Newton nel caso in cui la radice sia semplice. Utilizzando quanto ottenuto, proporre un metodo per la stima della costante asintotica dell'errore basato sul rapporto degli scarti.

17. Sapendo che il metodo di Newton viene utilizzato per il calcolo della radice $\xi \in (0, 1)$ dell'equazione $\tan(x) = 1 - x^2$, supposto $e_n = 10^{-4}$, quanto vale e_{n+1}?

18. Il metodo di Newton ha sempre ordine di convergenza al più quadratico.

    ☐ vero ☐ falso

19. Determinare x_2, x_3 del metodo della secante variabile partendo da $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ per approssimare lo zero dell'equazione $x^2 - 1 = 0$.

20. Calcolare i punti fissi dell'equazione dell'equazione $x = x^2 + 3x$. Indicare, inoltre, se le corrispondenti iterazioni di punto fisso sono o meno convergenti supponendo di partire convenientemente vicino al punto fisso.

21. Illustrare graficamente il metodo di punto fisso per risolvere l'equazione $x = g(x)$. Proporre una condizione sufficiente alla convergenza della iterazione di punto fisso $x_{n+1} = g(x_n)$.

22. Illustrare il criterio di arresto basato sullo scarto per l'iterazione di punto fisso. Sotto quali condizioni è affidabile?

23. Enunciare un risultato per l'ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso.

24. Calcolare la norme uno, due, inifinto e di Frobenius per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

25. Calcolare lo spettro ed il raggio spettrale della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26. Calcolare il numero di condizionamento $K_2(A)$ della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\xi \end{pmatrix}$$

    al variare di $\xi \in \mathbb{R}$

27. Siano A una matrice quadrata di ordine n e $\rho(A)$ il suo raggio spettrale. Dimostrare che $\rho(A) \leq ||A||$ per ogni norma di matrice indotta.

28. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Definire il numero di condizionamento $K(A)$ e dimostrare che $K(A) \geq 1$. Fornire un esempio di matrice con $K(A) = 1$ ed un altro esempio con $K(A) = 10^6$.

29. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A non singolare e $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Ricavare la relazione
$$\frac{||\delta\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} \leq K(A)\frac{||\delta\mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||}$$
e commentare il significato della disequazione a seconda di $K(A)$.

30. Per quale motivo il metodo di Cramer per risolvere il sistema lineare quadrato non singolare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ non è interessante dal punto di vista della soluzione al calcolatore?

31. Ricavare le relazioni per risolvere un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A quadrata, non singolare di ordine n e triangolare alta. Qual è la complessità computazionale dell'algoritmo?

32. Sapendo che la matrice A ha la fattorizzazione $A = LU$ con $|U| = -2$, calcolare $|A^{-3}|$.

33. Calcolare la fattorizzazione $A = LU$ della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

34. Calcolare, usando il pivoting parziale, la fattorizzazione $PA = LU$ di
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

35. Qual è la complessità computazionale della risoluzione mediante la fattorizzazione LU di $m >> 1$ sistemi lineari del tipo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$, $k = 1, \ldots, m$?

36. Indicare sotto quali condizioni il metodo iterativo $\mathbf{x}^{(k+1)} = E\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{q}$ con $\mathbf{q} = (1 \;\; 2)^T$ risulta convergente per ogni scelta del vettore iniziale $\mathbf{x}_0$. Quali delle seguenti matrici E danno luogo a dei metodi iterativi convergenti? Nel caso in cui il metodo iterativo converga, a quale vettore converge? Quale dei metodi è il più veloce?

(a) $E = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}$ (b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$ (c) $E = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

37. Calcolare le matrici di iterazione di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A la matrice dell'esercizio 33.

38. Calcolare, assumendo come vettore iniziale il vettore nullo, le prime tre iterazioni dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con A la matrice dell'esercizio 34.

39. Ricavare la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel. Scrivere esplicitamente le equazioni del metodo nel caso di un sistema di ordine due (ossia, scrivere le equazioni di aggiornamento per $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$).

40. Sapendo che il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha $K(A) = 10^4$ e che la matrice di iterazione E di un metodo iterativo per risolverlo ha $||E|| = 0.1$, conviene scegliere un criterio di arresto basato sullo scarto tra due iterate consecutive o un criterio di arresto basato sul residuo relativo? Perché?

41. Stabilire se ci sono valori del parametro reale ξ tali che il metodo di Gauss-Seidel associato alla matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 1-\xi & 1 \end{pmatrix}$$

risulta convergente. In caso di risposta affermativa, trovare il valore (o i valori) di ξ in corrispondenza del quale la convergenza è più veloce.

42. Calcolare e disegnare i polinomi di Lagrange $L_0^{(0)}$ e $L_1^{(1)}$ relativi ai due nodi x_0 e x_1 (n=1). Verificare che la loro somma dà la funzione costante 1.

43. Scrivere l'espressione di Lagrange del polinomio interpolante di grado n passante per i nodi x_k, $k = 0, \dots, n$.

44. Sia $f(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$. Scrivere l'espressione del polinomio di Lagrange di grado $n = 1$ che interpola f nei nodi $x_0 = 0$ ed $x_1 = 1$ e calcolare l'errore di interpolazione in $x = 0.5$.

Domande Matlab

1. (a) Si scriva una function Matlab che implementa il seguente metodo di punto fisso

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{K}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

dove x_0 è il punto iniziale, $f(x) = x^3 - \cos(x)$ e K è una costante assegnata. Il test di arresto da utilizzare è basato sullo scarto ($|x_{n+1} - x_n| <$ toll) e sul numero massimo di iterazioni.

   (b) Si scriva uno script di prova della function precedente che visualizza la soluzione trovata, lo scarto finale ed il numero di iterazioni impiegato.

2. Come nella domanda precedente per il metodo di Newton-Raphson per risolvere l'equazione non lineare $f(x) = 0$.

3. Sia x un vettore di dimensione n e α un numero reale dato. Calcolare

$$K_n = \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|}, \quad n = 1, 2, \ldots, n-1.$$

4. Determinare il numero minimo n di termini che è necessario considerare affinché la somma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k^4}$$

superi una data soglia S. Scrivere una function che riceve in ingresso S e restituisce in uscita n.

5. (a) Costruire, <u>mediante un unico ciclo for</u>, una matrice quadrata A di ordine n tale che

$$\begin{aligned} &A(i,i) = i, \;\; i = 1, \ldots, n \\ &A(i,i-1) = i-1, \;\; i = 2, \ldots, n \\ &A(i,i+1) = i+1, \;\; i = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Tutti gli altri elementi sono nulli.

   (b) Come si potrebbe costruire la stessa matrice senza ciclo for?

6. Scrivere una function che, mediante cicli, calcola la norma infinito della matrice quadrata A.

7. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Scrivere una function che calcola la norma di Frobenius di A definita da

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

Scrivere il codice sia utilizzando dei cicli for che senza alcun ciclo for.

8. Scrivere una function che calcola il valore a_M di modulo massimo della matrice A di ordine n definito da

$$a_M = \max_{i,j=1,\cdots,n} | a_{i,j} |$$

utilizzando

   (a) solo cicli for;

   (b) un'unica istruzione Matlab priva di cicli for.

9. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Quale è l'istruzione Matlab per determinare le dimensioni della matrice (numero di righe e di colonne)?

   (b) Scrivere l'unica istruzione Matlab che permette di porre gli elementi della seconda colonna di A uguali a -1 (ossia, $a_{i,2} = -1$ per $i = 1, \ldots, m$ dove m è il numero di righe della matrice).

   (c) Come andrebbe modificato il punto precedente se invece della seconda colonna fosse la seconda riga?

10. Quali risultati producono ognuna delle seguenti istruzioni Matlab?

   (a) A = zeros(2,3);

   (b) A = ones(2,3);

   (c) A = eye(3);

   (d) A = zeros(2);A(3,3)=1;

11. Indicare l'effetto prodotto dalle istruzioni Matlab a sinistra e dalle istruzioni a destra, compresi gli eventuali errori e la natura degli errori.

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6]

A =

     1     2     3
     4     5     6

>> A(2,3)=A(3,2)
```

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6]

A =

     1     2     3
     4     5     6

>> A(:,1) = ( A(2,[1 3]) )'; A(3,3)=3;
```

12. (a) Costruire il vettore v definito da

$$v(n) = 3n^2 + n, \quad n = 1, 2, \cdots, 100.$$

    (b) Quale vettore viene costruito con l'istruzione Matlab x=1:2:16 ?

13. Scrivere un codice Matlab per disegnare, in un'unica finestra, i grafici delle funzioni

$$f(x) = e^{-x}\cos(x), \qquad g(x) = e^{-x}\sin(x)$$

    nell'intervallo $I = [0, 1]$. Aggiungere alla figura le legende per gli assi, un titolo ed una legenda per le tracce dei grafici.

14. Quale grafico ci si aspetta che appaia con le seguenti istruzioni Matlab?

```
>> x=linspace(2,8,50);
>> y = 10.^(-x+3);
>> semilogy(x,y,'-og')
```

(a)	una retta blu	(b)	una curva blu con dei cerchietti verdi
(c)	cerchietti gialli	(d)	una curva gialla
(e)	una retta verde	(f)	non appare nulla
(g)	una retta verde con dei cerchietti verdi	(h)	una retta gialla con dei cerchietti giall

15. Generare una matrice A di 10 righe e 8 colonne contenente numeri casuali con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Quindi, le seguenti matrici:

    (a) TD calcolare la matrice che contiene le tre diagonali principali di A;
    (b) U calcolare la matrice che contiene la parte triangolare superiore;
    (c) calcolare i valori singolari di A.

16. Scrivere una function Matlab per calcolare il numero minimo di termini del tipo

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

    che è necessario sommare per superare una data soglia. Vanno bene tutti i valori della soglia? (Suggerimento: la serie $\sum a_n$ è convergente...)

17. Data la matrice quadrata A di m righe ed n colonne, scrivere la function Matlab che restituisce il vettore colonna v di dimensione m che ha nel posto i-esimo il prodotto di tutti gli elementi della riga i-esima di A

$$v(i) = \prod_{j=1}^{n} a_{ij}, \qquad i = 1, \cdots, m$$

    Utilizzare solo cicli!

18. Scrivere il codice Matlab per vedere se una matrice e' diagonalmente dominante in senso stretto per righe (colonne).

19. Scrivere la function Matlab per risolvere un sistema triangolare superiore (inferiore).

20. Scrivere la function Matlab per risolvere il sistema bidiagonale $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

    e $\mathbf{b}$ un vettore che contiene tutti numeri casuali con distribuzione uniforme nell'intervallo $[0,\ 1]$.

21. Scrivere una function Matlab che implementa il metodo iterativo di Jacobi (Gauss-Seidel). Usare un test di arresto basato sulla norma del residuo e sul numero massimo di iterazioni.

22. Sia A una matrice quadrata di ordine $n = 5$. Scrivere le istruzioni Matlab per

    (a) calcolare gli autovalori di A;

    (b) calcolare il raggio spettrale di A;

    (c) assegnare a B la trasposta coniugata di A;

    (d) calcolare $C = A^2$;

    (e) calcolare la matrice D i cui elementi sono definiti da $d_{ij} = a_{ij}^2$, $i, j = 1, \ldots, n$.

23. Dato l'insieme di punti (ξ_i, y_i), $i = 0, \cdots, n$, scrivere il codice Matlab che permette di valutare il polinomio di interpolazione di Lagrange nei punti specificati nelle ascisse contenute nel vettore x.

24. Data una matrice quadrata A di ordine n, scrivere un codice Matlab per mostrare a video, in sequenza, le sottomatrici A_i formate dalle prime i righe e i colonne di A con $i = 1, \cdots, n$. Ad esempio, le prime tre matrici sono

$$A_1 = (a_{11}), \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

25. Dato il vettore x, calcolare, con un ciclo for, la somma dei quadrati dei suoi elementi. Ottenere lo stesso risultato senza alcun ciclo for.

26. Scrivere una function per calcolare l'integrale di f nell'intervallo $[a, b]$ con il metodo dei trapezi (Cavalieri-Simpson) composto.

27. Scrivere l'istruzione Matlab per creare il vettore <u>colonna</u> x definito da $x_k = k$, $k = 1, \cdots, n$ con $n = 100$. Scrivere poi le istruzioni Matlab per le seguenti operazioni
    (a) calcolare la norma euclidea di x.
    (b) calcolare il vettore v definito da $v_k = x_k^{y_k}$ dove $y_k = (-1)^k$, $k = 1, \cdots, n$.

28. Consideriamo la matrice A formata da $n = 4$ righe e $m = 6$ colonne.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{bmatrix}.$$

    (i) Costruire la matrice B formata dalle colonne di A disposte in ordine inverso (ossia, la 1° colonna di B è la 6° di A, la 2° di B è la 5° di A e così via).
    (ii) Costruire la matrice formata dalle sole colonne pari di A.
    (iii) Costruire la matrice A formata dalle sole righe dispari di A.
    (iv) Costruire la matrice formata dalle righe 1, 4, 3 e dalle colonne 5, 2.
    (v) Costruire il vettore formato dagli elementi diagonali a_{kk}, $k = 1, \cdots, n$

29. Disegnare in una figure Matlab il poligono di vertici $V_j = [x_j, y_j]^T$, $j = 1, \cdots, n$. I vertici sono contenuti nella matrice di 2 righe e k colonne vtx che contiene nella colonna j-esima le coordinate del vertice V_j:

$$vtx = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots & y_n \end{bmatrix}.$$

Suggerimento: il poligono è chiuso per cui l'ultimo vertice deve essere connesso con il primo...

30. I termini di una successione sono calcolati iterativamente mediante la relazione

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & 2y_n - z_n \\ y_{n+1} & = & y_n \\ z_{n+1} & = & -x_n + 2y_n - z_n \end{cases}$$

a partire dai valori iniziali $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = 3$.

(i) Posto

$$w_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

esprimere in forma matriciale il legame tra w_{n+1} e w_n (ossia, trovare una matrice A tale che $w_{n+1} = Aw_n$).

(ii) Scrivere l'algoritmo per calcolare e memorizzare in una matrice W i primi 10 vettori w_n. La colonna j-esima di questa matrice contiene il vettore w_j, $j = 1, 2, \cdots, 10$.

31. Scrivere un programma Matlab che effettua la somma di tutti i numeri memorizzati nel vettore v che occupano le posizioni pari (ossia, calcolare $v(2) + v(4) + v(6) + \cdots$). Ripetere il codice per effettuare la somma di tutti i numeri in posizione dispari. Scrivere sia il codice con dei cicli for che senza alcun ciclo.

32. Calcolare il prodotto di tutti gli elementi di una matrice A. Scrivere il codice con dei cicli for e anche con un'unica istruzione Matlab (Suggerimento: usare la function prod).

33. Dato il vettore x di dimensione n, calcolare le somme

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \cdot x_{k+1},$$

Usare dei cicli e anche un'unica istruzione Matlab.

34. Data la funzione $f(x) = x^2 + 2x$, scrivere il codice Matlab per crearne il grafico nell'intervallo $[-1, 1]$ usando 200 punti equispaziati.

35. Dato il vettore x, scrivere le istruzioni Matlab per calcolare

$$m_x = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}, \qquad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - m_x)^2}{n}}$$

usando dei cicli for e senza cicli.

36. Data la funzione di due variabili $f(x, y) = x^2 - y^2$, scrivere le istruzioni Matlab per poterne disegnare il grafico nel quadrato di lato 2 centrato nell'origine degli assi.

37. Indicare cosa <u>stampa</u> a monitor il seguente codice Matlab

```
somma = 0
while( somma<10 )
   if somma>5
      somma=somma+2
   else
      somma=somma+2;
   end
end
```

38. Sia A una matrice quadrata di ordine n. Scrivere una function Matlab per calcolare il valore medio degli elementi della matrice che superano una soglia s assegnata. Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e $s = 2$ dobbiamo calcolare

$$m_s = \frac{a_{14} + a_{22} + a_{23} + a_{44}}{4}$$

perché 4 sono gli elementi che superano la soglia $s = 4$. Per $s = 1$ avremmo invece

$$m_s = \frac{a_{12} + a_{13} + a_{22} + a_{23} + a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{44}}{8}$$

39. Scrivere una function per calcolare i primi n termini della successione di Fibonacci definita da

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

con $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$.

40. Scrivere una function per calcolare qual è il primo termine della successione di Fibonacci a superare una data soglia s.

41. Scrivere una function per costruire i termini della successione di Collatz definita da

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n/2 & , \ x(n) \text{ è pari} \\ 3\,x_n + 1 & , \ x(n) \text{ è dispari} \end{cases}$$

La successione x_n termina quando, per qualche n naturale, risulta $x_n = 1$. Provarla per i due casi $x_1 = 5$ e $x_1 = 7$.

42. Scrivere il codice Matlab per creare la matrice A di ordine n definita da

$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_k & O_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & U_{n-k} \end{array} \right)$$

I_k indica la matrice identità di ordine k, $O_{m,n}$ indica la matrice di m righe e n colonne di tutti zeri, U_k la matrice di ordine k formata da elementi tutti uguali a 1.

43. Sia A la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Indicare quale risultato producono le seguenti operazioni Matlab (ognuna presa a sè):

(a) `A(:,3) = [ ];` (b) `A(1,:) = [];` (c) `A(1,2) = length(A(:,2));`

(d) `B=A(3:end,2:4)` (e) `B = A(1:2,1:2).^2` (f) `B = A(1:2,1:2)^2`

44. Dire che cosa stampa a monitor il seguente codice Matlab

```
A = [1 2 3; 4 5 6];
n = length( A(:) );
for k=1:n
   A(k) = A(k)^2;
end
A
```

45. Dire che cosa stampa a monitor il seguente codice Matlab

```
a = 1; b = 2;
if a>b
   c = a
elseif a<b
   c = b
   a = b
end
if a==b
   c = a+b
end
```

46. Dato il vettore x di dimensione n, scrivere una function che riceve in ingresso il vettore x e restituisce in uscita il valore massimo di x, il valore minimo di x, il valore medio di x. Usare solo cicli for per la scrittura del codice.

47. Individuare gli errori nel seguente codice Matlab e proporre le relative correzioni.

```
function (s,p) = pippo(x,y)
%PIPPO somma e prodotto interno dei vettori x e y
```

```
x = x(:);
y = y(:);
s = x+y;
p = x*y;
```

48. Scrivere una function Matlab che, dati in ingresso la matrice A di ordine n, il vettore colonna x ed il numero naturale $m = 1, 2, 3, ...$, crea la matrice B la cui colonna k-esima è $A^{k-1}x$, $k = 1, \cdots, m$.

49. Scrivere il codice Matlab per verificare se la matrice quadrata A è simmetrica.

50. Scrivere il codice Matlab per verificare se la matrice quadrata A di ordine n ha tutti gli elementi positivi (negativi) ossia $a_{i,j} > 0$, $i, j = 1, \cdots, n$.