Corso di Laurea in Matematica Applicata

Probabilità

Esercitazione n. 3 del 03/05/2016

Docente: Bruno Gobbi

ESERCIZI SULLE VARIABILI CASUALI

1) Sia data la funzione continua *y* = 0,5 + 3*x* e verificare:

a) se si tratta di una Variabile Casuale (V.C.) sul dominio [0;1];

b) in caso contrario determinare il coefficiente angolare in modo che lo sia;

c) calcolarne Media e Moda.

a) Affinché la funzione della retta proposta sia una V.C. nel dominio [0;1] occorre verificare la non negatività della stessa (cosa confermata dal fatto che *y* è sempre positiva) e che l'integrale sia pari a 1.

$$\int_0^1 (0,5+3x)dx = \left[0,5x + 3\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = (0,5+1,5-0) = 2$$

Dato che il valore dell'integrale non è 1, ma 2, questa funzione non è una V.C.

b) Determiniamo il valore del coefficiente angolare che consente di avere un integrale pari a 1:

$$\int_0^1 (0,5 + bx)dx = \left[0,5x + b\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(0,5 + b\frac{1}{2} - 0\right) = 1$$

$$0,5b = 0,5$$

$$b = 1$$

Quindi la nostra funzione diventa una V.C. con la seguente densità di probabilità:

$$P(x) = 0,5 + x$$

c) La Media della V.C. si ottiene calcolando l'integrale del prodotto fra x e la densità di probabilità ovvero:

$$M(x) = \int_0^1 x(0,5 + x)dx = \left[0,5\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 0\right) = \frac{7}{12}$$

L'individuazione della Moda avviene agevolmente se si considera che, trattandosi di una retta crescente, il valore delle x che presenta la probabilità più elevata corrisponde all'estremo superiore del dominio e quindi Moda=1.

Dipartimento di Informatica
Collegio didattico di Matematica
Ca' Vignal 2 – Strada Le Grazie, 15 – 37134 | T + 39 045 802 7927
ammin-collegi.dipinfo@ateneo.univr.it
P. IVA 01541040232 | C.F. 93009870234

2) Data la funzione continua P(x) = 0,5*x* definita per valori di *x* che vanno da 0 ad "*a*":

a) trovare il parametro *a* in modo che sia una V.C.;

b) calcolare la Media;

c) calcolare la Varianza.

a) Per trovare il parametro *a* occorre che l'integrale della funzione sia pari a 1:

$$\int_0^a (0{,}5x)dx = 1$$

$$\left[0{,}5\frac{x^2}{2}\right]_0^a = 1$$

$$0{,}25a^2 = 1$$

$$a = 2$$

b) Il computo della Media avviene calcolando l'integrale:

$$M(x) = \int_0^2 x(0{,}5x)dx = \left[0{,}5\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 0{,}5\frac{8}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

c) La varianza si calcola tramite l'integrale del prodotto di x^2 per la funzione di probabilità e quindi sottraendo il quadrato della media (media dei quadrati meno quadrato della media):

$$M(x^2) = \int_0^2 x^2(0{,}5x)dx = \left[0{,}5\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2$$

$$V(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Dipartimento di Informatica
Collegio didattico di Matematica
Ca' Vignal 2 – Strada Le Grazie, 15 – 37134 | T + 39 045 802 7927
ammin-collegi.dipinfo@ateneo.univr.it
P. IVA 01541040232 | C.F. 93009870234

3) Data la funzione continua P(x) = 5*kx* definita sul dominio [0;4] determinare il parametro "*k*" in modo che si tratti di una V.C. e calcolare:

a) **la Media;**
b) **la Varianza;**
c) **la Mediana;**
d) **il decimo Percentile;**
e) **P(*x*) ≥ 2.**

Per trovare il parametro *k* occorre che l'integrale della funzione sia pari a 1:

$$\int_0^4 (5kx)dx = \left[5k\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 1$$

$$k = \frac{1}{40}$$

Quindi la funzione diventa:

$$P(x) = 5\frac{1}{40}x = \frac{1}{8}x$$

a) La Media si individua calcolando l'integrale:

$$M(x) = \int_0^4 x\left(\frac{1}{8}x\right)dx = \left[\frac{1}{8}\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 2,\bar{6}$$

Dipartimento di Informatica
Collegio didattico di Matematica
Ca' Vignal 2 – Strada Le Grazie, 15 – 37134 | T + 39 045 802 7927
ammin-collegi.dipinfo@ateneo.univr.it
P. IVA 01541040232 | C.F. 93009870234

b) La Varianza si calcola tramite l'integrale del prodotto di x^2 e la funzione di probabilità e quindi sottraendo il quadrato della media:

$$M(x^2) = \int_0^4 x^2 \left(\frac{1}{8}x\right) dx = \left[\frac{1}{8}\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = 8$$

$$V(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = 8 - (2,\bar{6})^2 = \frac{8}{9}$$

c) La Mediana si calcola individuando quel valore della x per il quale l'integrale è pari a 0,5:

$$Me(x) = \int_0^{me} \left(\frac{1}{8}x\right) dx = 0,5$$

$$Me(x) = \left[\frac{1}{8}\frac{x^2}{2}\right]_0^{me} = 0,5$$

$$Me(x) = 8$$

d) In maniera analoga il decimo Percentile si calcola individuando quel valore della x per il quale il valore dell'integrale è pari a 0,1:

$$x_{10\%} = \int_0^{x10\%} \left(\frac{1}{8}x\right) dx = 0,1$$

$$x_{10\%} = \left[\frac{1}{8}\frac{x^2}{2}\right]_0^{x10\%} = 0,1$$

$$x_{10\%} = 1,2649$$

e) $$P(x \geq 2) = \int_2^4 \left(\frac{1}{8}x\right) dx = \left[\frac{1}{8}\frac{x^2}{2}\right]_2^4 =$$

$$= 0,75$$

Dipartimento di Informatica
Collegio didattico di Matematica
Ca' Vignal 2 – Strada Le Grazie, 15 – 37134 | T + 39 045 802 7927
ammin-collegi.dipinfo@ateneo.univr.it
P. IVA 01541040232 | C.F. 93009870234