Sistemi di due particelle

Problema dei due corpi: studio del moto relativo di due corpi supposti puntiformi sotto l'azione della forza di interazione mutua.

Esempio: moto (relativo) di due corpi celesti sotto l'azione della forza gravitazionale moto di un pianeta relativo al sole, moto della luna rispetto alla terra, moto dell'elettrone rispetto al protone nell'atomo di idrogeno ma anche il moto (relativo) di una coppia di punti materiali collegati tra loro da una molla, oppure da un'asta rigida e di massa trascurabile.

Le grandezza cinematiche (posizione velocità e accelerazione) del centro di massa del sistema dei due corpi nel sistema L e C:

Vettori $\mathbf{r}_{CM}$, $\mathbf{v}_{CM}$, $\mathbf{a}_{CM}$ del centro di massa nel sistema L:

$$\mathbf{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{r}_i + m_2\mathbf{r}_2) / (m_i + m_2)$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \mathbf{v}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{v}_i + m_2\mathbf{v}_2) / (m_i + m_2)$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{a}_i + m_2\mathbf{a}_2) / (m_i + m_2)$$

Vettori $\mathbf{r}'_{CM}$, $\mathbf{v}'_{CM}$, $\mathbf{a}'_{CM}$ del centro di massa nel sistema C:

$$\mathbf{r}'_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \mathbf{r'}_i' / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{r}_i' + m_2\mathbf{r}_2') / (m_i + m_2) = 0$$

$$\mathbf{v}'_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \mathbf{v'}_i' / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{v}_i' + m_2\mathbf{v}_2') / (m_i + m_2) = 0$$

$$\mathbf{a}'_{CM} = \sum_{i=1}^{2} m_i \mathbf{a}_i / \sum_{i=1}^{2} m_i = (m_1\mathbf{a}_i' + m_2\mathbf{a}_2') / (m_i + m_2) = 0$$

Grandezze cinematiche relative nel sistema L: $\mathbf{r}_{12,}$ $\mathbf{v}_{12}$ $\mathbf{a}_{12}$
e nel sistema del centro dimassa (C): $\mathbf{r}_{12}'$, $\mathbf{v}_{12}'$, e $\mathbf{a}_{12}'$

N.B.: Il vettore posizione, velocità e accelerazione <u>relativa</u> dei due corpi <u>non devono dipendere</u> dal sistema si riferimento L o C che sia. Infatti:

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_{12}' \qquad (\text{e } \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_{21}'),$$
$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_{12}' \qquad (\text{e } \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_{21}'),$$
$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1' - \mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_{12}' \qquad (\text{e } \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_{21}').$$

<u>I passo</u>: Vogliamo trovare le relazioni che legano le grandezza cinematiche (posizione, velocità e accelerazione) individuali dei due corpi in termini delle corrispondenti grandezze relative nel sistema L e nel sistema C:

Vettore posizione della particella m_i nel sistema C:

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}$$

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = m_2\, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_{12}'$$
$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{CM} = m_1\, \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{21}'$$

Vettore velocità della particella m_i in C:

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{CM}$$

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{CM} = m_2\, \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{12}'$$
$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{CM} = m_1\, \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{v}_{21} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{21}'$$

Vettore accelerazione della particella m_i nel sistema C:

$$\mathbf{a}_i' = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{CM}$$

$$\mathbf{a}_1' = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_{CM} = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_{12}'$$
$$\mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_{CM} = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{21}'$$

N.B.: Nel caso in cui il sistema delle due particelle sia isolato (i.e.: quando non $\exists\ \mathbf{F}_{ik}^{(e)}$ e quindi $\mathbf{F}_i^{(E)} = 0$, per i = 1, 2), per cui quindi $\mathbf{a}_{CM} = \mathbf{0}$, si ha che l'accelerazione relativa $\mathbf{a}_i'$ e l'accelerazione assoluta $\mathbf{a}_i$ di ciascuna particella coincidono e sono legate all'accelerazione relative $\mathbf{a}_{ij}$ (oppure $\mathbf{a}_{ij}'$) dalle relaizioni:

$$\mathbf{a}_1' = \mathbf{a}_1 = m_2\, \mathbf{a}_{12}/(m_1+m_2) \qquad \mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_2 = m_1\, \mathbf{a}_{21}/(m_1+m_2)$$

<u>II passo: Studio del moto relativo di due corpi</u> supposti puntiformi sotto l'azione della forza di interazione mutua $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}(r_{12})$

Esempi: $\mathbf{F}_G(r_{21}) = -\,\gamma\, Mm\, \mathbf{r}_{21}/r_{21}^3$; $\mathbf{F}_G(r_{12}) = -\,\gamma\, Mm\, \mathbf{r}_{12}/r_{12}^3$

$\mathbf{F}_{el}(x_{21}) = -\,k\,[(x_2-x_1) - l_0]$; $\mathbf{F}_{el}(x_{12}) = -\,k\,[(x_1-x_2) + l_0]$

Equazione del moto di ognuno dei due PM espressa dalla legge di Newton: $m_i\mathbf{a_i} = \mathbf{F}(r_{ij})$, con i,j = 1,2 e (j=i):

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}$$
$$m_2\mathbf{a}_2 = -\,\mathbf{F}_{12}$$

Accelerazione relativa della particella 1 rispetto alla particella 2:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}(1/m_1 + 1/m_2)$$

Definizione di massa ridotta μ del sistema: $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$
Sfruttando la definizione di massa ridotta μ: $1/\mu = [1/m_1 + 1/m_2]$

Si avrà:

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{12}/\mu$$

Questa relazione esprime i<u>l moto relativo</u> delle 2 particelle, soggette unicamente alla loro mutua interazione, che è stata ottenuta partendo <u>dall'equazione del moto delle 2 particelle</u>, può essere scritta anche così:

$$\mu\mathbf{a}_{12} = \mathbf{F}_{12}$$

Equazione del moto relativo dei due corpi in termini della loro massa ridotta: $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2) = m_1/(1 + m_1/m_2)$

Essa è l'equazione del moto in un SRI (Sistema L) di una particella di massa μ soggetta all'azione di una forza F_{12}.

Ora $\mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1' - \mathbf{a}_2' = \mathbf{a}_{12}'$ (perché sistema isolato).

Quindi sarà pure:

$$\mu\mathbf{a}_{12}' = \mathbf{F}_{12}$$

Questa è l'equazione del moto nel Sistema C (ancorato al CM del sistema) di una particella di massa μ soggetta all'azione di una forza F_{12}.

N.B.: Il moto relativo di due particelle nel sistema di riferimento L è equivalente al moto di una particella di massa μ (massa efficace del sistema) soggetta all'azione di una forza uguale alla forze di interazione mutua $\mathbf{F}_{12}$ studiato nel sistema C (che è un sistema di riferimento inerziale!)

N.B.: A rigore, lo studio del moto relativo in un SRI di due corpi celesti soggetti all'azione della forza di attrazione gravitazionale è ricondotto allo studio, nel sistema di riferimento C, del moto di un corpo di massa μ che si muove sotto l'azione di $\mathbf{F}_G$. Tuttavia ….

Cosa succede quando $m_1 >> m_2$ (sistemi sole-pianeta, pianeta-satellite, come ad esempio il sistema terra–luna: massa terra >> massa luna; etc. o nel caso dell'atomo di idrogeno: massa protone >> massa elettrone).

La massa ridotta $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2) = m_2/(1 + m_2/m_1) \cong m_2$ mentre la posizione del CM del sistema "coincide" con m_1
e questo giustifica l'approssimazione usata nell'espressione della legge di gravitazione universale fatta da noi finora e l'adozione del sistema di riferimento con origine O ancorato alla massa m_2.

In generale, se le due masse sono confrontabili, si deve studiare il moto, nel sistema C, in termini della massa ridotta μ.

Esempio: Caso del moto roto-traslatorio su un piano orizzontale perfettamente liscio di manubrio costituito da 2 corpi puntiformi ancorati alle estremità di un'asta rigida lunga L e priva di massa. Calcolo della tensione della asta:

$$m_1\mathbf{a}_1 = \mathbf{T}_1$$
$$m_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{T}_2$$

Per il principio di A/R: $\mathbf{T}_2 = -\mathbf{T}_1$, ma $T_2 = T_1$

$$T = \mu\, v_{12}^2/r_{12} = \mu\, v_{12}^2/L.$$

N.B.: Il modulo T dipende dalla velocità di rotazione ω del manubrio, atteso che $v_{12} = L\omega$, che, quindi, deve essere nota.

Esercizio: Coppia di corpi puntiformi posti in quiete su un piano orizzontale perfettamente liscio e collegati da una molla a riposo. A $t_0 = 0$ viene applicato al corpo di massa m_1 un impulso $\mathbf{J}_0 = J_0\,\mathbf{i}$. Studiare il moto del sistema dopo l'applicazione dell'impulso, e derivare, in particolare, per $t > t_0$:
a) la legge oraria $x_{CM}(t)$ del moto del CM due corpi;
b) le leggi orarie dei due corpi $x_1'=x_1'(t)$ e $x_2'=x_2'(t)$ nel sistema C;
c) le leggi orarie dei due corpi $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ nel sistema L.

Sia $x_{21}(t)$ la legge oraria del moto relativo del P.M. 2 rispetto al P.M. 1, che si ottiene risolvendo l'equazione del moto:

$$\mathbf{a}_{21} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{21}/\mu, \qquad \text{con } \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{el}\,(x_{21}) = -\,k\,[(x_2-x_1)-l_0]\mathbf{i}$$

e ricordando che:

$x_1'\,(t) = [m_2/(m_1+m_2)]\,x_{12}\,(t)$ e $x_2'\,(t) = [m_1/(m_1+m_2)]\,x_{21}(t)$
N.B.: $x_1(t) = x_{CM}(t) + x_1'\,(t) = [x_{CM}(0) + J_0t/(m_1+m_2)] + m_2x_{12}(t)$
$x_2(t) = x_{CM}(t) + x_2'\,(t) = [x_{CM}(0) + J_0t/(m_1+m_2)] + m_1x_{21}(t)$

Espressione delle grandezze dinamiche collettive nel sistema C e delle relazioni di Konig per un sistema a due corpi.

Espressione delle grandezze dinamiche collettive nel sistema C

– <u>Quantità di moto</u>:

$$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{0},$$

da cui $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2'$, e ricordando che $\mathbf{v}_1' = m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)$,

Si avrà anche:

$\mathbf{p}_1' = m_1\mathbf{v}_1' = m_1m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2) = \mu\,\mathbf{v}_{12}$

$\mathbf{p}_2' = m_2\mathbf{v}_2' = m_2m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2) = \mu\,\mathbf{v}_{21} = -\mu\,\mathbf{v}_{12}$.

Quindi: $p_1' = p_2' = \mu\, v_{12} = p'$

N.B.: Il modulo della quantità di moto di ognuna delle due particelle, nel sistema C, equivale al modulo della quantità di moto di una particella di massa μ che si muove con la velocità relativa delle due particelle.

Ovviamente:

$$\mathbf{P}_S' = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mu\,\mathbf{v}_{12} - \mu\,\mathbf{v}_{21} = \mathbf{0},$$

– <u>Energia cinetica interna</u>: E_k^{INT}

$$E_k^{INT} = \tfrac{1}{2}\mu\, v_{12}^2 = p'^2/2\mu$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
E_k^{INT} &= \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\
&= \tfrac{1}{2} m_1[m_2\mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)]^2 + \tfrac{1}{2} m_2 [m_1\mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)]^2 = \\
&= \tfrac{1}{2} m_1m_2^2\, \mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 + \tfrac{1}{2}\, m2m^{12}\, \mathbf{v}_{21}^2/(m_1+m_2)^2 = \\
&= \tfrac{1}{2} m_1m_2\,(m_1+m_2)\,\mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2)^2 = \tfrac{1}{2} m_1m_2\,\mathbf{v}_{12}^2/(m_1+m_2) = \\
&= \tfrac{1}{2}\,\mu\,\mathbf{v}_{12}^2
\end{aligned}$$

N.B.: L'energia cinetica interna di un sistema di 2 particelle equivale all'energia cinetica di una particella di massa μ che si muove con la velocità relativa delle due particelle.

– Momento angolare interno o intrinseco: $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$

$$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12}\,.$$

Dinostrazione:

$\mathbf{L}_{CM}^{INT} = \mathbf{r}_1' \wedge m_1 \mathbf{v}_1' + \mathbf{r}_2' \wedge m_2 \mathbf{v}_2' =$

$= m_2\, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \wedge m_1[m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + m_1\, \mathbf{r}_{21}/(m_1+m_2) \wedge m_2 [m_1 \mathbf{v}_{21}/(m_1+m_2)] =$

$= m_2 \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2) \wedge m_1[m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] + [-\, m_1\, \mathbf{r}_{12}/(m_1+m_2)] \wedge m_2 [-\, m_1 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)] =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge m_1 m_2^2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 + \mathbf{r}_{12} \wedge m_1^2 m_2 \mathbf{v}_{12}/(m_1+m_2)^2 =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1 m_2^2/(m_1+m_2)^2 + m_1^2 m_2/(m_1+m_2)^2]\, \mathbf{v}_{12} =$

$= \mathbf{r}_{12} \wedge [m_1 m_2\, (m_1+m_2)/(m_1+m_2)^2]\, \mathbf{v}_{12} = \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12}$

N.B.: Il momento angolare intrinseco $\mathbf{L}_{CM}^{INT}$ (riferito al CM) di un sistema di 2 particelle equivale al momento della quantità di moto (riferito ad un punto O) di una particella di massa μ che si trova nel punto individuato dal raggio vettore posizione relativa $\mathbf{r}_{12}$ che si muove con la velocità relativa delle due particelle $\mathbf{v}_{12}$.

Teoremi di Konig per un sistema due corpi

N.B.: La velocità $\mathbf{v}_{CM}$ di un sistema isolato è costante:
Usando le grandezze calcolate nel sistema C si avrà:

$$\mathbf{P}_S = M\, \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{P}_S' = M\, \mathbf{v}_{CM}$$

$$E_{k,S} = E_{k,CM} + E_k^{INT} = ½\, M v_{CM}^2 + ½\, \mu\, v_{12}^2$$

$$\mathbf{L}_{O,S} = \mathbf{L}_{O,CM} + \mathbf{L}'_{CM,S} = \mathbf{r}_{CM} \wedge M\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{r}_{12} \wedge \mu\, \mathbf{v}_{12}$$

Risoluzione di alcuni problemi di dinamica dei sistemi a 2 corpi:

1) Due blocchi di massa m_1 e m_2 , inizialmente in quiete su un piano orizzontale liscio, sono attaccati alle estremità di una molla ideale di costante elastica k e di lunghezza a riposo l_0, con l'asse di simmetria lungo l'asse x. All'istante t = 0 viene applicato al blocco di massa m_1 in direzione parallela all'asse di simmetria della molla un impulso $\mathbf{J}_0 = J_0\, \mathbf{i}$**.** Studiare il moto del sistema, determinando, in particolare, per t > 0:
a) la posizione iniziale del CM,
b) la legge oraria del moto del CM,
c) le legge oraria del moto relativo dei sue blocchi;
d) le leggi orarie del moto dei due blocchi nel sistema C;
e) le leggi orarie dei due blocchi nel sistema L.

2) Due blocchi di massa m_1 e m_2, posti su piano orizzontale liscio, sono attaccati alle estremità di una molla ideale di costante elastica k e di lunghezza a riposo l_0, con l'asse di simmetria lungo l'asse x. Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete con la massa m_1 appoggiata alla base di una parete verticale fissa con la molla completamente compressa tramite una fine ancorata alla due masse. All'istante t = 0 la molla viene lasciata espandere, e nell'istante t_0 in cui la molla raggiunge la sua lunghezza di riposo, la massa m_1 si stacca dalla parete**.** Studiare il moto del sistema per t>0, calcolando espressamente nel sistema di riferimento del laboratorio:
a) l'accelerazione del CM del sistema all'istante $t = 0_+$;
b) la legge oraria del moto del CM dopo che il blocco di massa m_1 ha abbandonato la parete verticale;
c) le leggi orarie del moto dei due blocchi nel sistema del CM.

Teoremi della dinamica per un sistema S di particelle:

A) Teorema dell'impulso applicato ad un sistema S:

$$\mathbf{J}_0 = \Delta\mathbf{P}_S$$

dove $\Delta\mathbf{P}_S = \sum_{i=1}^{N} \Delta\mathbf{p}_i$.

B) Teorema del momento dell'impulso:

$$\mathbf{r}_0 \wedge \mathbf{J}_0 = = \Delta\mathbf{L}_{0,S} \ .$$

con $\Delta\mathbf{L}_{0,S} \ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_{0,i} \wedge \Delta\mathbf{p}_i$.

Esempi di applicazione:

1) Si consideri un manubrio asimmetrico, posto in quiete su un piano orizzontale liscio incardinato a una cerniera coincidente con il corpo di massa $m_{1.}$ Studiare il moto di un manubrio dopo l'applicazione di un impulso istantaneo $\mathbf{J}_0$ in corrispondenza del corpi di massa m_2 in direzione ortogonale all'asse principale di simmetria del manubrio. Determinare in particolare:
a) velocità del CM;
b) velocità angolare di rotazione del manubrio;
c) tensione dell'asta,
d) energia cinetica interna e momento angolare interno.

2) Manubrio (simmetrico o asimmetrico) con due masse m_1 e m_2, inizialmente posto in quiete su un piano orizzontale perfettamente liscio. All'istante t = 0 si applica un impulso alla particella m_2 un impulso $\mathbf{J}_0$ che formi un angolo θ_0 con l'asse di simmetria principale del manubrio. Studiare il moto del sistema calcolando:
a) velocità del CM;
b) velocità angolare di rotazione del manubrio;
c) tensione dell'asta,
d) energia cinetica interna e momento angolare interno.